

(T1) **Брехня чи не зовсім? / True or False**

Вам необходимо определить, является ли каждое из ниже приведённых утверждений верным (True) или неверным (False). В листе ответов поставьте «птичку» возле нужного слова (TRUE / FALSE) для каждого утверждения. Доказывать свою точку зрения для этих заданий нет необходимости.

- (T1.1) На фотографии чистого неба, полученной ночью при полной Луне с довольно длинной выдержкой, цвет неба будет голубым, как днём. 2
- (T1.2) Астроном в Бубанешваре отмечает положение Солнца на небе каждый день в 05:00 UT по Всемирному времени в течении года. Если бы ось вращения Земли была бы перпендикулярна плоскости орбиты, положения Солнца в течении года очертили бы дугу большого круга. 2
- (T1.3) Если период вращения малого тела Солнечной системы вокруг Солнца в плоскости эклиптики меньше орбитального периода Урана, то орбита такого тела обязательно будет находиться в пределах орбиты Урана (ни в коем случае не будет пересекать орбиту Урана). 2
- (T1.4) Центр масс Солнечной системы всегда находится внутри Солнца. 2
- (T1.5) Фотон движется в открытом космосе. В связи с расширением Вселенной его импульс будет уменьшаться. 2

(T2) **Газы на Титане / Gases on Titan**

Частицы газа в атмосфере планеты имеют широкое распределение по скоростям. Если средняя квадратичная скорость теплового движения частиц газа достигает $1/6$ скорости убегания, то большая часть газа покинет планету. Каков минимальный атомный вес (в атомных единицах массы) одноатомных частиц газа A_{min} , оставшихся в атмосфере Титана? 10

Известно, то масса Титана $M_T = 1.23 \cdot 10^{23}$ кг, радиус Титана $R_T = 2575$ км, температура на поверхности Титана $T_T = 93.7$ К.

(T3) **Ранняя Вселенная / Early Universe**

В рамках космологической модели плотность энергии излучения ρ_r во Вселенной пропорциональна $(1+z)^4$, а плотность энергии вещества (материи) ρ_m пропорциональна $(1+z)^3$, где z – красное смещение. Безразмерный параметр плотности Ω определяется как $\Omega = \rho/\rho_c$, где ρ_c – критическая плотность Вселенной. В современной Вселенной, параметры плотности, соответствующие излучению и материи, равны соответственно $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$ and $\Omega_{m_0} = 0.3$.

- (T3.1) Рассчитайте красное смещение z_e , при котором плотности энергии излучения и материи были равны. 3
- (T3.2) Предполагая, что пришедшее к нам реликтовое излучение от ранней Вселенной имеет чернотельный спектр и температуру 2.732 К, определите температуру реликтового излучения T_e , соответствующую красному смещению z_e . 4
- (T3.3) Определите типичную энергию фотона E_ν (в элетронвольтах eV) реликтового излучения на красном смещении z_e . 3

(T4) **Тени / Shadows**

Наблюдатель в северном полушарии заметил, что самая короткая тень от метрового вертикального стержня была равна 1.732 метра. В тот же день самая длинная тень от того же стержня равнялась 5.671 метров. 10

Найдите широту места наблюдения ϕ и склонение Солнца δ_{Sun} в этот день. Солнце считать точечным источником света. Рефракцией пренебречь.

(T5) **Прохождение пучка ГМРТ / GMRT beam transit**

Гигантский Метроволновый Радио Телескоп ГМРТ (GMRT) является одним из самых больших радиотелескопов мира, работающих в метровом диапазоне и расположен в западной Индии (широта: $19^\circ 6' \text{с. ш.}$, долгота: $74^\circ 3' \text{в. д.}$). ГМРТ состоит из 30 круглых сегментов (антенн), 10

диаметр каждого сегмента 45.0 метров. Один сегмент ГМРТ был вручную установлен на зенитный угол $39^{\circ}42'$ вдоль северного меридиана так, что точечный радиоисточник пересечёт диаграмму направленности (поле зрения) антенны по диаметру во время прохождения меридиана

Какова продолжительность $T_{transit}$ прохождения источника через полную ширину на половине максимума (FWHM) пучка одного сегмента ГМРТ при наблюдении на частоте 200 МГц.

Подсказка: Угловой размер полуширины луча (FWHM) соответствует угловому разрешению круглого сегмента на заданой частоте.

(T6) **Cepheid Pulsations Пульсации цефеид**

Звезда β -Doradus является цефеидой с периодом пульсации 9.84 суток. Для упрощения считаем, что звезда наиболее яркая при минимальном радиусе (радиус равняется R_1) и, что звезда наиболее тусклая при максимальном радиусе (радиус равен R_2). Также, для упрощения, предположим, что звезда сохраняет свою сферическую форму и ведёт себя как абсолютно черное тело в течении всего цикла пульсаций. Болومترическая величина звезды изменяется в пределах $3.46^m - 4.08^m$. Измеряя доплеровское смещение было установлено, что поверхность звезды расширяется или сжимается со средней скоростью 12.8 км/с. В течении всего периода пульсаций длина волны, соответствующая максимуму излучения звезды колеблется в пределах от 531.0 нм до 649.1 нм.

- (T6.1) Найдите отношение максимального и минимального радиусов звезды (R_1/R_2). 7
- (T6.2) Определите максимальный и минимальный радиусы звезды (в метрах) (R_1 и R_2). 3
- (T6.3) Рассчитайте поток излучения от звезды F_2 , когда ее радиус максимален. 5
- (T6.4) Определите расстояние до звезды, D_{star} , в парсеках. 5

(T7) **Telescope optics Оптика телескопа**

В практически идеальном телескопе рефракторе с фокальным отношением $f/5$, фокусное расстояние объектива равно 100 см, а окуляра – 1 см.

- (T7.1) Каково увеличение телескопа m_0 ? Какова длинна телескопа L_0 , т.е. расстояние между объективом и окуляром? 4

Использование вогнутой линзы (линзы Барлоу) между объективом и главным фокусом является общепринятым способом повышения увеличения телескопа без значительного увеличения длины телескопа. Линза Барлоу с фокусным расстоянием 1 см помещена между объективом и окуляром с целью получения дополнительного двукратного увеличения.

- (T7.2) На каком расстоянии d_B от главного фокуса должна быть помещена линза Барлоу для получения дополнительного двукратного увеличения? 6
- (T7.3) На сколько увеличится длина телескопа ΔL ? 4

В данной части задачи телескоп имеет тот же объектив и ПЗС камеру, установленную в главном фокусе (без каких-либо окуляров или линз Барлоу). Размер одного пикселя ПЗС матрицы 10 микрон (микрометров).

- (T7.4) Каким будет расстояние между центроидами изображений двух звёзд n_p (в пикселях) на ПЗС камере, если угловое расстояние между ними на небе равно $20''$ угловых секунд? 6

(T8) **U-Band photometry U-Band фотометрия**

Видимая звёздная величина звезды в полосе/фильтре U равна $m_U = 15.0^m$. Фильтр U считаем идеальным, т.е. его коэффициент пропускания равен единице (100%) на всех длинах волн в пределах полосы пропускания и равен нулю (0%) за пределами этой полосы. Фильтр сцентрирован на длину волны 360 нм и имеет ширину пропускания 80 нм. Также считается, что энергетический спектр звезды на всех частотах плоский. Переход между звёздной величиной m в любой полосе/фильтре и плотностью потока f от звезды в Янских ($1 \text{ Янски} = 1 \cdot 10^{-26} \text{ Вт/Гц/м}^2$) задается формулой

$$f = 3631 \times 10^{-0.4m} \text{ Jy}$$

- (T8.1) Оцените количество фотонов N_0 в полосе U от звезды, которые будут попадать каждую секунду перпендикулярно площадке 1 m^2 за пределами земной атмосферы. 8

Эту звезду наблюдают в полосе U с помощью 2-ух метрового телескопа на Земле. Поглощение света атмосферой Земли во время наблюдений составляет 50%. Качество изображения – дифракционное. Средняя поверхностная яркость ночного неба в фильтре U составляет $22.0 \text{ mag/arcsec}^2$.

- (T8.2) Найдите отношение R числа фотонов, получаемых за секунду от звезды и ночного неба, измеряемых в пределе круговой диафрагмы размером $2''$? 8

- (T8.3) На практике, только 20% фотонов в полосе U , попадающих на главное зеркало, регистрируются. Сколько фотонов N_f от звезды мы регистрируем каждую секунду? 4

(T9) Mars Orbiter Mission

Индийская Миссия Марс Орбитер (Mars Orbiter Mission – MOM) была запущена с использованием the Polar Satellite Launch Vehicle (PSLV) 5 ноября 2013 года. Сухая масса корабля 500 кг, масса топлива 852 кг. Миссия запущена на эллиптическую орбиту вокруг Земли с высотой в перигее 264.1 км и высотой в апогее 23903.6 км. После шестикратного повышения орбиты корабль был переведён на Гомановскую орбиту для дальнейшего перелёта на Марс.

Во время первого повышения орбиты двигатель сообщает кораблю импульс $1.73 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Изменением массы корабля при сгорании топлива пренебречь.

- (T9.1) Какова будет высота корабля в апогее h_a над поверхностью Земли после первого повышения орбиты? 14

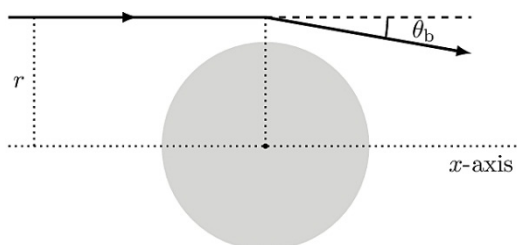
- (T9.2) Рассчитайте эксцентриситет e новой орбиты после работы двигателя и новый орбитальный период. 6

(T10) Гравитационное линзирование / Gravitational Lensing Telescope

Общая теория относительности предсказывает отклонения света вблизи массивных объектов. Для упрощения примем, что преломление происходит в одной точке, как показано на рисунке. Угол отклонения можно рассчитать по формуле:

$$\theta_b = \frac{2R_{sch}}{r}$$

где R_{sch} – радиус Шварцшильда, прицельное расстояние r , ось x проходит через центр гравитационной массы и параллельна падающему лучу.



Таким образом, массивное тело ведёт себя как собирающая линза. Лучи, идущие с бесконечности и имеющие то же прицельное расстояние r , сходятся в точке на оси x на расстоянии r_f от центра массивного тела. Наблюдатель в этой точке будет наблюдать усиление интенсивности излучения благодаря гравитационному линзированию. Массивное тело в данном случае работает в качестве гравитационного телескопа для усиления удалённого сигнала.

- (T10.1) Найдите минимальное расстояние f_{min} , от центра Солнца (в а.е.), до точки, в которой будут фокусироваться лучи, если считать его гравитационной линзой. 6

- (T10.2) Рассмотрим небольшой круговой детектор с радиусом a , расположенный на расстоянии f_{min} на оси x и перпендикулярный ей. В этот детектор могут пройти лучи, прошедшие через небольшое кольцо толщиной h ($h \ll R_{Sun}$) вокруг Солнца. Коэффициент усиления 8

телескопа определяется как отношение интенсивности света попадающего на детектор в присутствии Солнца и в предположении, что Солнца нет вообще.

Выразите коэффициент усиления A_m на детекторе с помощью величин R_{Sun} и a .

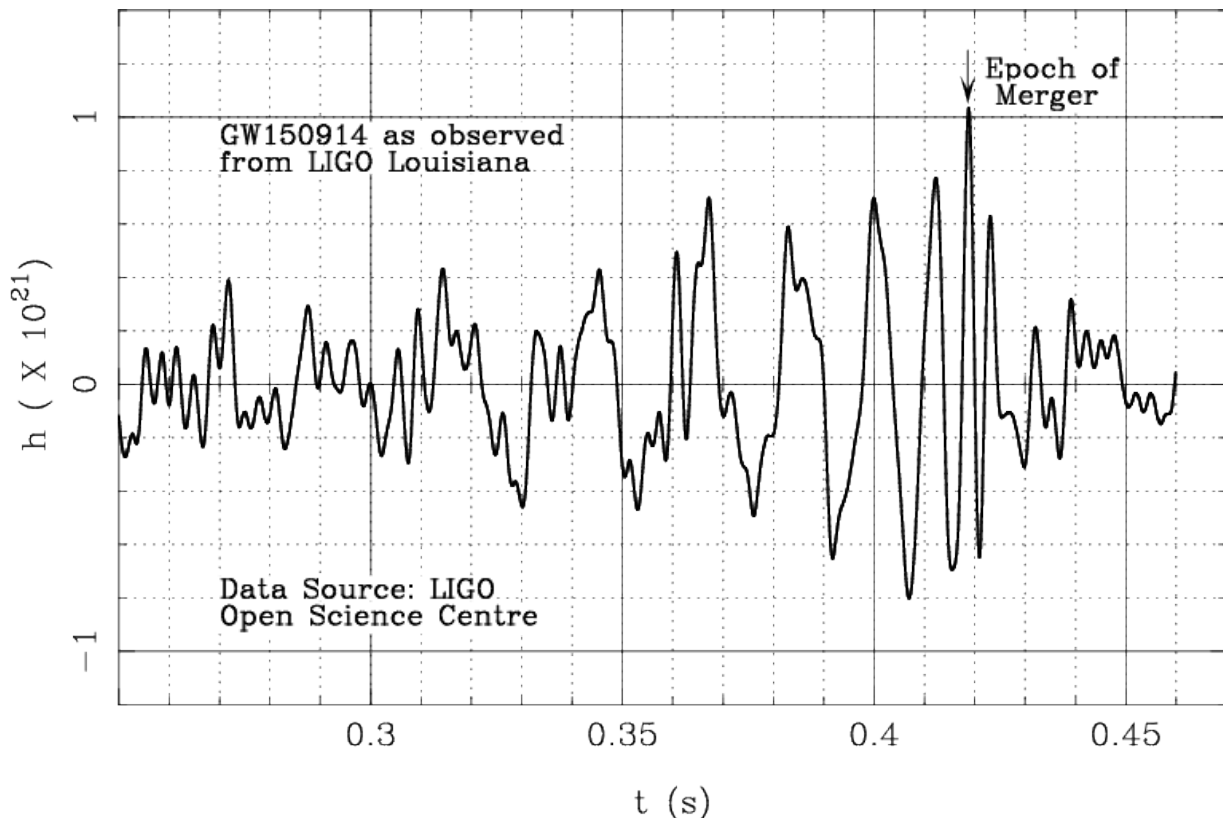
(T10.3) Предполагая сферическое распределение масс, как, например распределение тёмной материи в скоплении галактик, сквозь которое лучи света могут проходить и в то же время отклоняться (прозрачная гравитационная линза). Для упрощения примем, что для гравитационного отклонения луча с прицельным параметром r играет роль только масса внутри этого радиуса $M(r)$.

6

Каким должно быть распределение масс $M(r)$ для того, чтобы гравитационная линза имела свойства идеальной оптической собирающей линзы?

(T11) Гравитационные волны / Gravitational Waves

Первый сигнал гравитационных волн был зарегистрирован в США в сентябре 2015 года. Одно из таких измерений (некое напряжение в зависимости от времени) представлено на графике. В данной задаче мы будем интерпретировать сигнал в терминах пробного тела малой массы m , что вращается вокруг тела большей массы M (т.е. $m \ll M$), принимая несколько моделей для объяснения природы центральной массы.



Пробное тело теряет энергию за счёт излучения гравитационных волн. В результате орбита тела будет уменьшаться до достижения им поверхности объекта или, в случае чёрной дыры, внутренней наиболее стабильной круговой орбиты (ISCO), радиус которой равен трём радиусам Шварцшильда (R_{Sch}) для черной дыры. $R_{ISCO} = 3R_{Sch}$. Момент достижения данных поверхностей и расстояний принято называть эпохой слияния («epoch of merger»). В этой точке амплитуда гравитационных волн максимальна, и таким образом, есть её частотой, которая всегда вдвое больше орбитальной частоты. В этой задаче мы сосредоточим наше внимание на гравитационных волнах перед слиянием, когда законы Кеплера, предположительно, ещё справедливы. После слияния форма гравитационных волн кардинально меняется.

(T11.1) Определите период T_0 , используя его значение, рассчитайте частоту f_0 гравитационных волн непосредственно перед эпохой слияния.

3

(T11.2) Для звёзд главной последовательности (main sequence MS), радиус звезды R_{MS} и её масса M_{MS} связаны степенным законом, представленным ниже:

10

$$R_{MS} \propto (M_{MS})^\alpha$$

where $\alpha = 0.8$ for $M_\odot < M_{MS}$
 $= 1.0$ for $0.08M_\odot \leq M_{MS} \leq M_\odot$

Предполагая, что центральный объект – звезда главной последовательности, запишите выражение для максимальной частоты гравитационных волн f_{MS} выраженной через массу звезды в единицах массы Солнца (M_{MS}/M_{Sun}) и показателя степени α .

- (T11.3) Используя полученный выше результат, определите соответствующее значение α , которое будет давать максимально возможное значение частоты гравитационных волн $f_{MS,max}$ для любой звезды главной последовательности. Рассчитайте эту частоту. 9
- (T11.4) Максимальная масса белого карлика (white dwarf – WD) $1.44 M_{Sun}$ (известна как граница Чандрассекара) и подчиняется соотношению масса радиус $R \propto M^{-1/3}$. Радиус белого карлика солнечной массы равен 6000 км. Найдите максимальную частоту излучаемых гравитационных волн $f_{WD,max}$, если пробное тело вращается вокруг белого карлика. 8
- (T11.5) Нейтронная звезда (NS) является пекулярным типом компактных объектов, чья масса лежит в пределах между 1 и 3 массами Солнца, а радиусы в пределах 10-15 км. Найдите диапазон частот излучаемых гравитационных волн $f_{NS,min}$ и $f_{NS,max}$, если пробное тело вращается вокруг нейтронной звезды вблизи её поверхности. 8
- (T11.6) Для случая, когда пробное тело вращается вокруг черной дыры (black hole – BH), напишите выражение для частоты излучаемых гравитационных волн f_{BH} , выразив её через массу M_{BH} черной дыры и массу Солнца M_{Sun} . 7
- (T11.7) Принимая во внимание только период (или частоту) гравитационных волн до эпохи слияния, определите, может ли центральное тело быть звездой главной последовательности (MS), белым карликом (WD), нейтронной звездой (NS) или черной звездой (BH). Поставьте «птичку» в нужной ячейке в листе ответов. Определите массу объекта M_{obj} в массах Солнца M_{Sun} . 5

(T12) Экзопланеты / Exoplanets

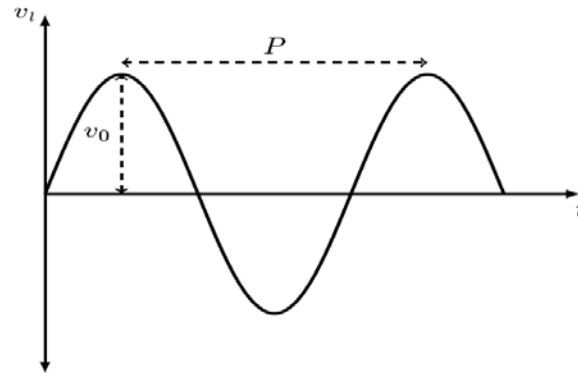
Двумя основными методами поиска экзопланет являются метод радиальных скоростей (или так называемый, метод «колебаний») и транзитный метод. В этой задаче мы покажем, как комбинируя результаты, полученные обоими методами, могут выявить множество информации о вращающейся экзопланете и её звезде.

В рамках данной задачи будем считать, что планета с массой M_P и радиусом R_P движется по круговой орбите радиуса a вокруг звезды с массой M_S ($M_S \gg M_P$) и радиусом R_S . Угол между нормалью к плоскости орбиты планеты и лучом зрения обозначим i . При $i = 90^\circ$ орбиту планеты мы видим с «ребра». Считаем, что вокруг звезды не вращаются другие планеты и что $R_S \ll a$.

Метод колебаний / “Wobble” Method:

Когда планета и звезда вращаются вокруг их барицентра, кажется, что звезда немного движется, или «колеблется», так как центр масс звезды не совпадает с барицентром системы звезда-планета. В результате, свет, приходящий от звезды поддается слабому воздействию эффекта Доплера.

Скорость на луче зрения может быть определена по эффекту Доплера известной спектральной линии, а периодические изменения со временем показаны на рисунке. На диаграмме показаны две измеряемые величины: орбитальный период P и максимальная скорость на луче зрения v_o .



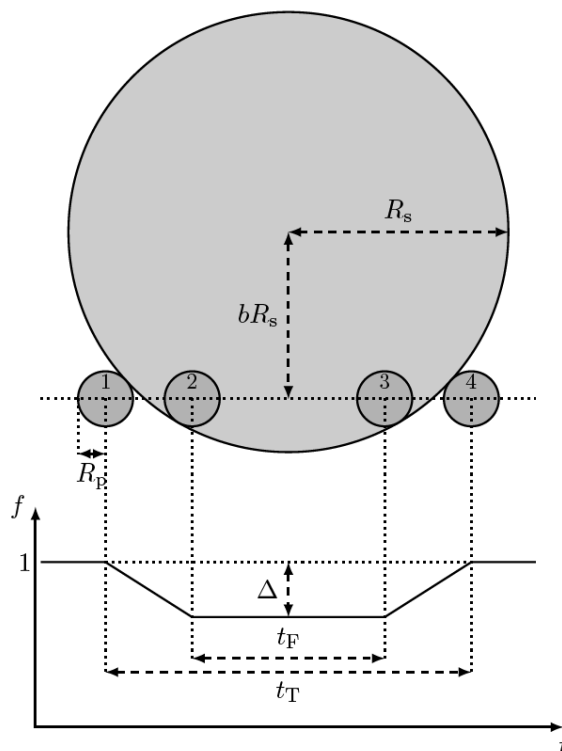
(T12.1) Получите выражения для радиуса орбиты a и орбитальной скорости v_P планеты, выраженные через массу звезды M_S и период P . 3

(T12.2) Рассчитайте нижний предел массы планеты $M_{p,\min}$, выраженный через M_S , v_0 и v_P . 4

Транзитный метод / Transit Method:

Планета, орбита которой лежит почти на луче зрения ($i = 90^\circ$), периодически будет проходить по диску звезды. Это будет вызывать незначительное ослабления потока излучения от звезды, который может быть измерен. Схематическая диаграмма ниже (НЕ в масштабе) показывает транзит для наблюдателя и результирующую кривую блеска (нормированный поток f от времени t) для довольно яркого звёздного диска.

Если угол наклона равен ровно 90° , то планета пройдет четко по диаметру звезды. Для других значений угла наклона i планета будет проходить по хорде, на расстоянии bR_S от центра диска, как показано на рисунке. Поток излучения от звезды вне затмения нормирован на 1, максимальное изменение потока во время транзита обозначено через Δ .



Четыре главные точки транзита – первый, второй, третий и четвертый контакты, обозначены соответствующими цифрами на рисунке выше. Промежуток времени между вторым и третьим контактами обозначено как t_F (диск планеты полностью находится на диске звезды). Промежуток времени между первым и четвертым контактами обозначено как t_T . Эти интервалы времени также обозначены на схеме.

Измеряемыми величинами в транзитном методе есть P , t_F , t_T и Δ .

(T12.3) Найдите ограничения на i , выраженное через R_S и a , при котором транзит будет виден для отдалённого наблюдателя. 2

(T12.4) Выразите Δ через R_S и R_P . 1

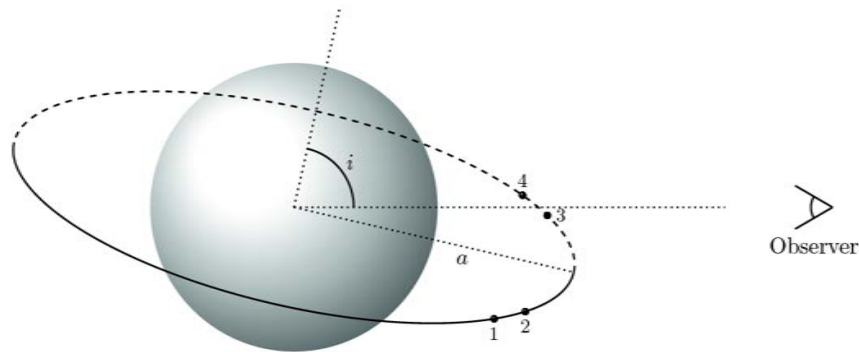
(T12.5) Express t_T and t_F in terms of R_S , R_P , a , P and b . 8

(T12.6) Предполагая, что радиус орбиты намного больше радиуса звезды, покажите, что параметр b выражается следующей формулой: 5

$$b = \left[1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

(T12.7) Используйте результат из предыдущего пункта (T12.6) чтобы вычислить соотношение a/R_S через параметры, измеряемые в транзитном методе, используя соответствующие приближения. 3

(T12.8) Комбинируя результаты обоих методов, определите плотность звезды $\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$ с помощью величин t_T , t_F , Δ и P . 6



Каменная или газовая / Rocky or gaseous:

Предположим, что плоскость звёздно-планетной системы лежит на луче зрения ($i = 90^\circ$) для земного наблюдателя. Известно, что масса звезды равна массе Солнца. Транзиты наблюдаются с периодом $P = 50.0$ суток и полная длительность транзита $t_T = 1.00$ час. Глубина транзита $\Delta = 0.0064$. Та же система наблюдалась методом колебаний и имела максимальную лучевую скорость 0.400 м/с.

(T12.9) Найдите радиус орбиты планеты a в а.е. и метрах 2

(T12.10) Найдите отношение t_F/t_T для системы. 2

(T12.11) Рассчитайте массу планеты M_P и её радиус R_P в единицах массы и радиуса Земли. Состав планеты больше похож на каменный или газовый? Поставьте «птичку» в соответствующей ячейке листа ответов. 8

Транзитная кривая блеска со звёздными пятнами и потемнением диска звезды к краю:

(T12.12) Предположим транзитную систему с $i = 90^\circ$, что вращается вокруг звезды с пятном на её экваторе. Размер пятна сравним с размером планеты R_P . Период вращения звезды $2P$. Нарисуйте схематические диаграммы кривых блеска транзитов для 5-ти 4

последовательных транзитов планеты (заготовки для кривых блеска даны в листах ответов для данной задачи). Поток излучения вне затмения может быть отнормирован независимо. Предположите, что планета не пересекается с пятном во время первого транзита, но пересекаются во время второго.

- (T12.13) В течении всей задачи мы предполагали, что диск планеты довольно яркий. Реальные диски планет имеют потемнение к раю. Нарисуйте схематически кривую блеска транзитной системы для случая, когда присутствует потемнение к краю диска у звезды, вокруг которой вращается планета. 2