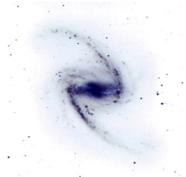
XII Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії м. Львів, 15 березня – 19 березня 2025 р.		Теоретичний тур 11 клас

1. Комета наближається.

Космічний апарат, що знаходився поблизу Сонця, зареєстрував комету, що рухалася на відстані r=5 а.о. від Сонця, змінюючи свою геліоцентричну екліптичну довготу на $\Delta\lambda$=0.03^o за добу та маючи променеву швидкість v_r=14.5 км/с. Обчислення показали, що комета має орбіту, яка лежить у площині екліптики та має перигелійну відстань 0.5 а.о.

1. Чи може ця комета бути періодичною? Якщо так, який її період обертання навколо Сонця?
2. Яку швидкість буде мати ця комета при проходженні орбіти Землі? Під яким кутом вона перетинає орбіту Землі (кут між напрямком швидкості комети та дотичною до орбіти Землі)? Орбіту Землі вважати коловою. **(10 балів)**

Розв’язання

1) Розрахуємо повну швидкість комети, перевівши градуси на добу у км/с тангенціальної швидкості:

$$v=\sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda\cdot r\cdot\pi\cdot 150\cdot 10^6}{180\cdot 24\cdot 3600}\right)^2+v_r^2}=15.2 \text{ км/с}$$

Обчислимо велику піввісь з інтегралу енергії: $v^2=GM_\odot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$, $a=7.1$ а.о.

Вона вийшла додатною, отже, орбіта еліптична та комета періодична.

Період обертання знайдемо з 3-го закону Кеплера $T=a^{3/2}$=19.0 років.

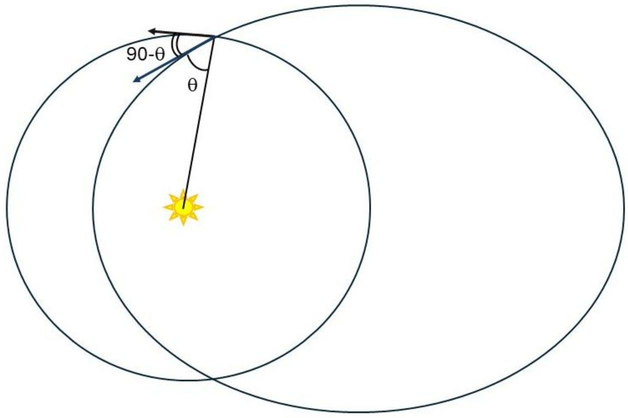
2) Знайти швидкість комети при перетині земної орбіти знову допоможе інтеграл енергії при r =1 а.о.: v_1=40.7 км/с.

Знайдемо кут між напрямком руху комети та її радіус-вектором (рис.). Для цього спочатку аналогічно знайдемо швидкість комети у перигелії (58.5 км/с), коли її радіус-вектор перпендикулярний до вектора швидкості, та застосуємо закон збереження моменту імпульсу:

$$v_1 r_1 \sin\theta = v_q r_q \sin 90$$

Другий варіант: можна також обчислити кут між радіусом-вектором і швидкістю на відстані r =5 а.о., адже нам відомі компоненти швидкості, та застосувати закон збереження моменту імпульсу до точок r =5 а.о. та r =1 а.о.

Одним із цих способів отримуємо кут 46.0^o. Позаяк дотична до колової орбіти Землі перпендикулярна до радіуса, то кут між дотичною до орбіти Землі та швидкістю комети дорівнює 90^o-45.7^o=44.0^o.



2. Подвійна система.

Знайти густину меншого за розміром компонента подвійної системи, якщо відомо наступне: система рухається в напрямку до Сонця, сумарна маса компонент 1.4 $M_{\odot}$. Променеві швидкості зір системи внаслідок орбітального руху змінюються в межах: від -2.85 до 36.28 км/с для одного з компонент та від -16.83 до 4.84 км/с для іншого. Відносна орбіта колова, кут нахилу орбіти невідомий. **(10 балів)**

Розв'язання

Аналіз. Швидкість центра мас системи (гама-швидкість, V_c) у випадку колової орбіти дорівнює середньому значенню максимальної та мінімальної швидкостей. Вона має бути однаковою для обох компонентів системи. У нашому випадку це не виконується. Ймовірно, одна з зір є релятивістським об'єктом, тому до зміщення спектральних ліній, зумовленого ефектом Доплера, додається гравітаційне червоне зміщення. Покладаємо, що система складається з білого карлика та зорі ГП.

Середні швидкості для кожної зорі: $V_{1сер}$=16.72 км/с та $V_{2сер}$ = -6.0 км/с. Відомо, що система рухається до Сонця, тобто V_c від'ємна. Внесок гравітаційного зміщення завжди додатний. Тому зоря ГП має від'ємну середню швидкість та $V_c = V_{2сер}$ = -6.0 км/с. Різниця $V_{1сер}$ та V_c буде пов'язана з гравітаційним червоним зміщенням: $V_{гр}$ = 22.72 км/с.

Амплітуди змін швидкостей: A_1=10.84 км/с, A_2=19.56 км/с. Амплітуди швидкостей обернено пропорційні масам компонентів. При відомій масі системи розв'язуємо систему рівнянь:

$$M_1/M_2=A_2/A_1,$$

$M_1+M_2=M$, причому нам потрібно знайти тільки M_2.

Тому $(M-M_2)/M_2=A_2/A_1=1.80$,

$M=2.80M_2$, $M_2=1.4M_{\odot}/2.8=0.5M_{\odot}$

Релятивістський об'єкт з масою $0.5M_{\odot}$ може бути і білим карликом, і нейтронною зорею. Гравітаційне червоне зміщення: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{GM}{Rc^2}$. У термінах променевої швидкості це $V_{гр}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}c=\frac{GM}{Rc}$

Тому $R=\frac{GM}{V_{гр}c}$=$0.014R_{\odot}$

Остаточно $\rho=\frac{0.5\,M_{\odot}}{4/3\,\pi\left(0.014\,R_{\odot}\right)^3}$= $1.6\cdot10^5$ г/см^3 (білий карлик)

3. Екзопланетна система.

Не так давно у відносно близької зорі була відкрита екзопланетна система. Навколо червоного карлика з радіусом 0.12 $R_{\odot}$ у майже одній площині та по майже колових орбітах обертаються 7 планет. Деякі їх характеристики наведені у таблиці.

Планета	Маса m, ($M_{\oplus}$)	Велика піввісь a, (а.о.)	Орбітальний період T, (земних діб)	Радіус R, ($R_{\oplus}$)
b	1.37	0.0115	1.51	1.12
c	1.31	0.0158	2.42	1.10
d	0.39	0.0223	4.05	0.77
e	0.69	0.0293	6.10	0.92
f	1.04	0.0385	9.21	1.05
g	1.32	0.0468	12.35	1.13
h	0.33	0.0619	18.77	0.78

Наш астронавт подорожує вздовж екватора планети ***e***. Припустимо, що її вісь обертання перпендикулярна до площини орбіти, атмосфера відсутня.

Опишіть умови спостереження астронавтом планет ***d*** та ***f***, в яких конфігураціях вони можуть бути, які в цей час їх кутові діаметри та з яким періодом конфігурації повторюються?

(10 балів)

Розв'язання

Уніфікуємо усі довжини в однакові одиниці, наприклад, у радіуси Землі.

Радіус зорі

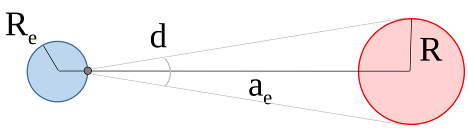
$$R = 0{,}12 R_{\odot} = 0{,}12 \cdot \frac{696000\,\text{км}}{6371\,\text{км}} = 13{,}1\, R_{\oplus}$$

Планета	Велика піввісь a ($R_{\oplus}$)
b	270
c	371
d	524
e	688
f	904
g	1099
h	1453

Орбіти планет майже колові і всі вони близькі до червоного карлика настільки, що навіть найвіддаленіша планета перебуває у 0.39/0.062≈6 разів ближче до нього, ніж Меркурій до Сонця. За розмірами екзопланетна система схожа на систему супутників Юпітера. Позаяк усі Галілеєві супутники Юпітера розташовані у гравітаційному захваті, тобто період їхнього осьового обертання дорівнює орбітальному періоду, можна впевнено припустити, що планети системи також обертаються синхронно.

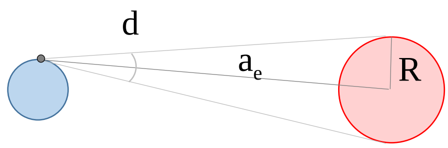
Виходячи з цих міркувань, припустимо, що червоний карлик розташований на сталій висоті над горизонтом планети ***e***. Якщо астронавт на екваторі планети перебуває у «підзоряній» точці, він побачить червоний карлик у зеніті. Тоді його видимий кутовий діаметр:

$$d = 2\frac{R}{a_e - R_e} \quad d = 2\frac{13{,}1}{688 - 0{,}92} = 0{,}381 = 2{,}2^{\circ}$$



Якщо астронавт на екваторі перебуває у точці, де карлик на горизонті, тоді видимий діаметр

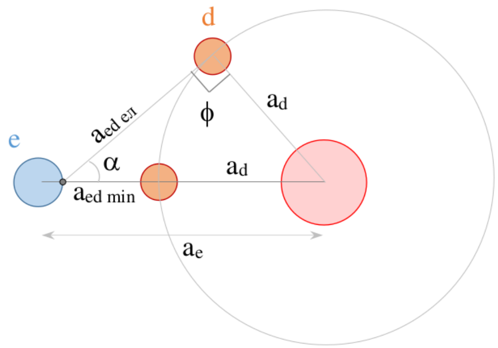
$$d = 2\frac{R}{a_e} \quad d = 2\frac{13{,}1}{688} = 0{,}381 = 2{,}2^{\circ}$$



Видимий діаметр зорі у будь-якій точці освітленої півкулі практично однаковий (2.2°), тобто у 4.5 рази більший, ніж видимий зі Землі діаметр Сонця.

Умови спостережень внутрішньої планети ***d***.

Планета ***d*** внутрішня для планети ***e***.



Найбільша елонгація для планетоцентричного спостерігача

$$\alpha = \arcsin\frac{a_d}{a_e};\ \alpha = \arcsin\frac{524}{688} = 49.6^o$$

Найбільша елонгація для спостерігача у «підзоряній» точці

$$\alpha = \arcsin\frac{a_d}{a_e - R_e};\ \alpha = \arcsin\frac{524}{688-0.92} = 49.7^o$$

Відстань у найбільшій елонгації $a_{ed\ ел} = \sqrt{a_e^2 - a_d^2} = \sqrt{688^2 - 524^2} \approx 446\ R_\oplus$.

Видимий кутовий діаметр в елонгації $\frac{2R_d}{a_{ed\ ел}} = \frac{2\cdot 0,77}{446} = 0,00345 \approx 0,198^\circ \approx 12'$

Видимий кутовий діаметр планети ***d*** у нижньому сполученні

$$\frac{2R_d}{a_e - a_d} = = \frac{2\cdot 0,77}{688 - 524} = 0,00939 = 0,54^\circ = 32'$$

у верхньому сполученні $\frac{2R_d}{a_e + a_d} = \frac{2\cdot 0,77}{688 + 524} = 0,00127 = 0,073^\circ = 4,4'$.

Синодичний період обертання

$$\frac{1}{S_d} = \frac{1}{T_d} - \frac{1}{T_e},\ \frac{1}{S_d} = \frac{1}{4,05} - \frac{1}{6,10} = 0,0830,\ S_d \approx 12.05 \text{ діб.}$$

Кожні 12 діб 1 годину планета ***d*** на небі планети ***e*** спричиняє «зоряне затемнення», віддаляється у найбільшу західну елонгацію на кут 31° від зорі, потім знову наближається до неї і ховається за її диском у верхньому сполученні, віддаляється від зорі, проходить найбільшу східну елонгацію 31° і знов проходить перед диском зорі у нижньому сполученні.

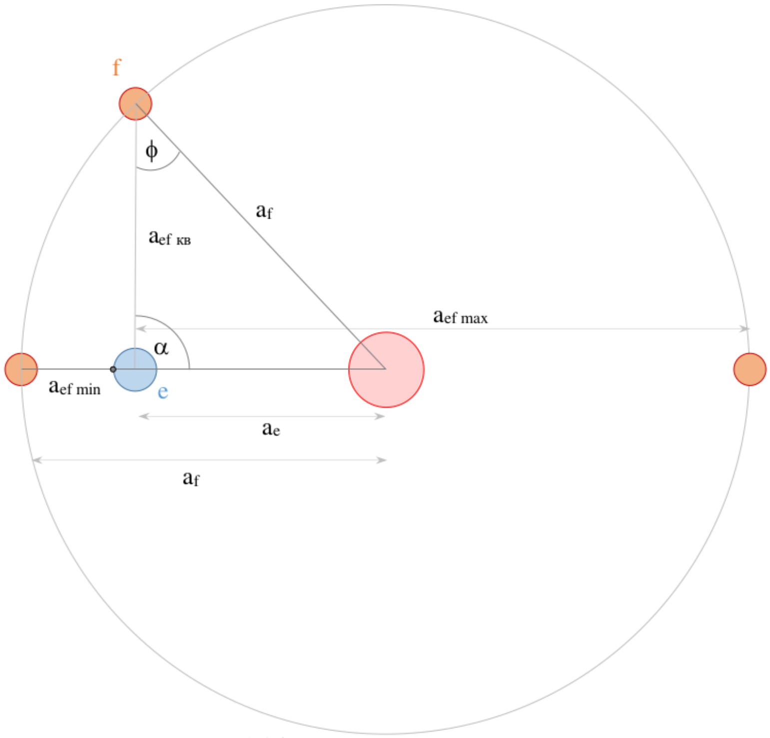
Позаяк планета ***e*** обертається синхронно, то все це можна побачити тільки на денній півкулі, яка завжди обернена до червоного карлика.

Умови спостережень зовнішньої планети ***f***.

Планета ***f*** є зовнішньою для планети ***e***. Її буває видно з усієї поверхні ***e***. Синодичний період

$$\frac{1}{S_f} = \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_f},\ \frac{1}{S_f} = \frac{1}{6,10} - \frac{1}{9,21} = 0,0554,\ S_f \approx 18.05 \text{ діб.}$$

Кожні 18 діб 1 годину планета ***f*** на небі планети ***e*** знаходиться у протистоянні на найменшій відстані 904-688=216 $R_\oplus$.



Видимий кутовий діаметр $2\dfrac{R_f}{a_f - a_e} = 2\dfrac{1,05}{216} = 0,00972 \approx 0,56^\circ \approx 33'$, тобто трохи більший за кутовий діаметр Місяця при спостереженні з поверхні Землі.

Після протистояння планета поступово віддаляється, її кутовий діаметр і фаза зменшуються. У квадратурі відстань

$$a_{ef\ кв} = \sqrt{a_f^2 - a_e^2} = \sqrt{904^2 - 688^2} \approx 586\ R_\oplus,$$

видимий кутовий діаметр $2\dfrac{R_f}{a_{ef\ кв}} = 2\dfrac{1,05}{586} = 0,00358 \approx 0,21^\circ \approx 12'$.

Після квадратури планета ***f*** наближається до червоного карлика, його фаза збільшується, видимий кутовий діаметр зменшується до $2\dfrac{R_f}{a_{ef\ max}} = 2\dfrac{R_f}{a_e + a_f} = 2\dfrac{1,05}{688 + 904} = 0,00132 \approx 0,076^\circ \approx 4,5'$, тобто для неозброєного ока планета виглядає як маленький диск.

<u>Відповідь</u>

Планета ***e*** обертається синхронно (у гравітаційному захваті), тобто одна півкуля завжди обернена до зорі.

Для спостерігача з її поверхні планета ***d*** внутрішня, конфігурації d повторюються через синодичний період 12 діб 1 годину. Найбільша елонгація 31°, спостерігається тільки на освітленій півкулі планети ***e***. Видимий кутовий діаметр змінюється від 32′ у нижньому сполученні до 12′ у найбільшій елонгації і до 4.4′ у верхньому сполученні.

Планета ***f*** зовнішня відносно ***e***, синодичний період 18 діб 1 година, може спостерігатись з усієї поверхні планети ***e***. Видимий кутовий діаметр змінюється від 33′ у протистоянні до 12′ у квадратурі і до 4.5′ у з’єднанні.

4. Arcanum nebula.

Зону HII вивчають за допомогою 4.5-метрового телескопу з головною фокусною відстанню 10 м з використанням ПЗЗ-матриці, встановленої за окуляром з фокусною відстанню 25 мм та полем зору 50^o. Все випромінювання, яке потрапило в об'єктив телескопу, без втрат фіксується матрицею. Турбулентність атмосфери не дозволяє підвищити роздільну здатність телескопу краще аніж 0.9″. Блиск нічного неба в районі обсерваторії, зумовлений власним світінням атмосфери та техногенними факторами, дорівнює 100 мклк/стерадіан. Для спрощення приймемо, що поверхнева яскравість туманності однакова в полі зору телескопа. Приймемо, що для реєстрації випромінювання астрономічного об'єкта необхідно, щоб освітленість, яку він створює в межах тілесного кута, під яким його видно, була не меншою за 10% від світіння неба в тому ж тілесному куті. Зауважимо, що зоряна величина, яка відповідає освітленості 1 люкс у смузі (V) пропускання ПЗЗ-матриці, дорівнює $(-14.18)^m$, а проникна здатність телескопу може бути апроксимована чисельною емпіричною залежністю: $m_V = 2.5 + 5\lg D + 2.1\times\lg t$, де D – діаметр об'єктиву телескопа (мм), t – експозиція (години). Щоночі спостереження тривають по 9^h.

1. Якою повинна бути кількість нічних спостережень для того, щоб можна було на зображенні зони HII розрізняти деталі її структури, кутові розміри яких дорівнюють роздільній здатності телескопу?
2. Якою є видима зоряна величина у смузі (V) зображення зони HII в полі зору телескопу? Вважайте, що туманність повністю заповнює це поле. Відповідь заокругліть до десятих.

(10 балів)

Розв'язання

а) Під квадратною секундою (□″) розуміють площу квадрата на сфері. Сторону квадрата видно під кутом 1″, якщо дивитися з центра сфери. Позаяк 1″ = 1/206265 рад, то площа такого квадрата дорівнює $(R/206265)^2$. Звідси та з означення тілесного кута випливає, що тілесний кут, під яким із центра сфери видно квадрат площею 1 □″ дорівнює $(1/206265)^2$ стерадіан (страд) $\approx 2.35\times10^{-11}$ страд. Знайдемо площу $\boldsymbol{S_\rho}$ на небесній сфері, що відповідає «пікселю» роздільної здатності телескопа. Врахувавши, що 0.9″ = 0.9/206265 рад $\approx 4.363\times10^{-6}$ рад, отримаємо:

$$\boldsymbol{S_\rho} = (4.363\times10^{-6})^2 \text{ страд} \approx 1.904\times10^{-11} \text{ страд.} \qquad (1)$$

б) Обчислимо світіння неба $\boldsymbol{m_{\rho V}}$ з площі $\boldsymbol{S_\rho}$, використовуючи дані з умови про те, що блиск нічного неба в районі обсерваторії, зумовлений власним світінням атмосфери та техногенними факторами, дорівнює 100 мклк/страд, а зоряна величина 1 люкса в смузі пропускання ПЗЗ-матриці (V) дорівнює $(-14.18)^m$. З умови випливає, що світіння неба в тілесному куті 1 стерадіан в 10000 разів менше за величину 1 люкс/страд. Цим величинам відповідає різниця в $10^{m/страд}$, тому, якщо зоряна величина 1 люкс/страд еквівалентна $(-14.18)^{m/страд}$, то світіння 100 мклк/страд еквівалентне $(-4.18)^{m/страд}$. Маємо формулу для знаходження шуканого параметра:

$$\boldsymbol{m_{\rho V}} = (-4.18)^m - 2.5\log\left(\frac{S\,\rho(страд)}{1страд}\right)^m \approx +22.62^m. \qquad (2)$$

в) Розрахуємо кут поля зору $\boldsymbol{b}$ телескопа:

$$\boldsymbol{b} = \frac{50^o}{\Gamma}, \qquad (3)$$

де $\boldsymbol{\Gamma}$ – кутове збільшення телескопа.

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{F}{f}, \qquad (4)$$

де $\boldsymbol{F}$ та $\boldsymbol{f}$ – фокусні відстані об'єктива та окуляра телескопа відповідно.

З (3) та (4) $\boldsymbol{b} = 0.125^o = 450''$, що дає змогу розрахувати кутову площу поля зору телескопа $\boldsymbol{S_b}$

$$\boldsymbol{S_b} \approx 159043\square'' = 250000\ \boldsymbol{S_\rho}. \qquad (5)$$

г) За умовою задачі, для реєстрації випромінювання від астрономічного об'єкту необхідно, щоб освітленість, яку він створює в межах тілесного кута, під яким його видно, була б не меншою від 0.1 від світіння неба в тому самому тілесному куті, що відповідає різниці блиску на 2.5^m. Зрозуміло, що «шумом» є світінння деякої ділянки атмосфери, а «сигналом» – блиск цієї ж ділянки, зумовлений світіннням туманності. Тому блиск ділянки туманності площею $\boldsymbol{S_\rho}$ може на 2.5^m бути більшим за $\boldsymbol{m_{\rho V}}$:

$$\boldsymbol{m_{\rho V;HII}} = +22.62^m + 2.5^m = +25.12^m. \qquad (6)$$

д) За умовою, проникна здатність телескопа може бути апроксимована емпіричною залежністю: $\boldsymbol{m_V = 2.5 + 5lgD + 2.1\times lgt}$. Щоб можна було на зображенні зони HII вивчати деталі її морфології, кутові розміри яких дорівнюють роздільній здатності телескопа, необхідно вважати, що за час $\boldsymbol{t}$ експозиції досягається проникна здатність $\boldsymbol{m_V = m_{\rho V;HII}}$. Звідси

$$\boldsymbol{m_{\rho V;HII} = 2.5 + 5lgD + 2.1\times lgt}.$$

Підставимо в останню формулу задане в умові значення діаметра телескопа (4500 мм) й отримане в (6) значення $\boldsymbol{m_{\rho V;HII}}$. Тоді неважко обчислити, що необхідний час експозиції

$$\boldsymbol{t} \approx 118.39^h.$$

Отже, кількість $\boldsymbol{n}$ спостережень тривалістю по 9^h кожне має бути ≈13.15. З огляду на те, що кількість нічних спостережень – натуральне число, отримуємо, що ***необхідна кількість N спостережень – 14***. *Маємо відповідь на перше запитання задачі.*

е) Тепер уже неважко отримати відповідь і на друге запитання задачі. З (5) та (6) знаходимо, що інтегральна (загальна) видима зоряна величина (V) зображення зони HII в полі зору телескопа через ≈ $118{,}39^h$ експозиції дорівнює

$$\boldsymbol{m_{інт}} = 25.12^m - 2.5lg(\boldsymbol{S_b/S_\rho}) \approx 11.63^m \approx 11.6^m.$$

ВІДПОВІДІ: 1) $\boldsymbol{N}$ – 14; 2) $\boldsymbol{m_{інт}} \approx 11.6^m$.

5. Гравітаційне лінзування.

Гравітаційне лінзування — це явище, коли світло від віддаленого джерела може відхилятися внаслідок існування масивного об'єкту-лінзи, що знаходиться поблизу або на лінії зору між спостерігачем і віддаленим об'єктом. Вперше це явище спостерігали під час сонячного затемнення 1919 року.

У цій задачі вам пропонується детальніше розібратися з явищем гравітаційного лінзування.

1. Гравітаційне лінзування на прямій.

При проходженні поблизу масивного об'єкту світло відхиляється на кут

$\alpha = \frac{4GM}{bc^2}$, де b-прицільний параметр, M-маса об'єкту.

Розгляньте випадок, коли лінза, джерело та спостерігач знаходяться на одній прямій. Нехай відстань від спостерігача до джерела D_s, а відстань до лінзи D_L.

Нарисуйте схему для опису фізичної картини, яку ми спостерігатимемо. Визначте кутовий радіус зображення. Відповідь подайте через параметри M, D_s, D_L та відомі константи.

2. Гравітаційне лінзування не на прямій.

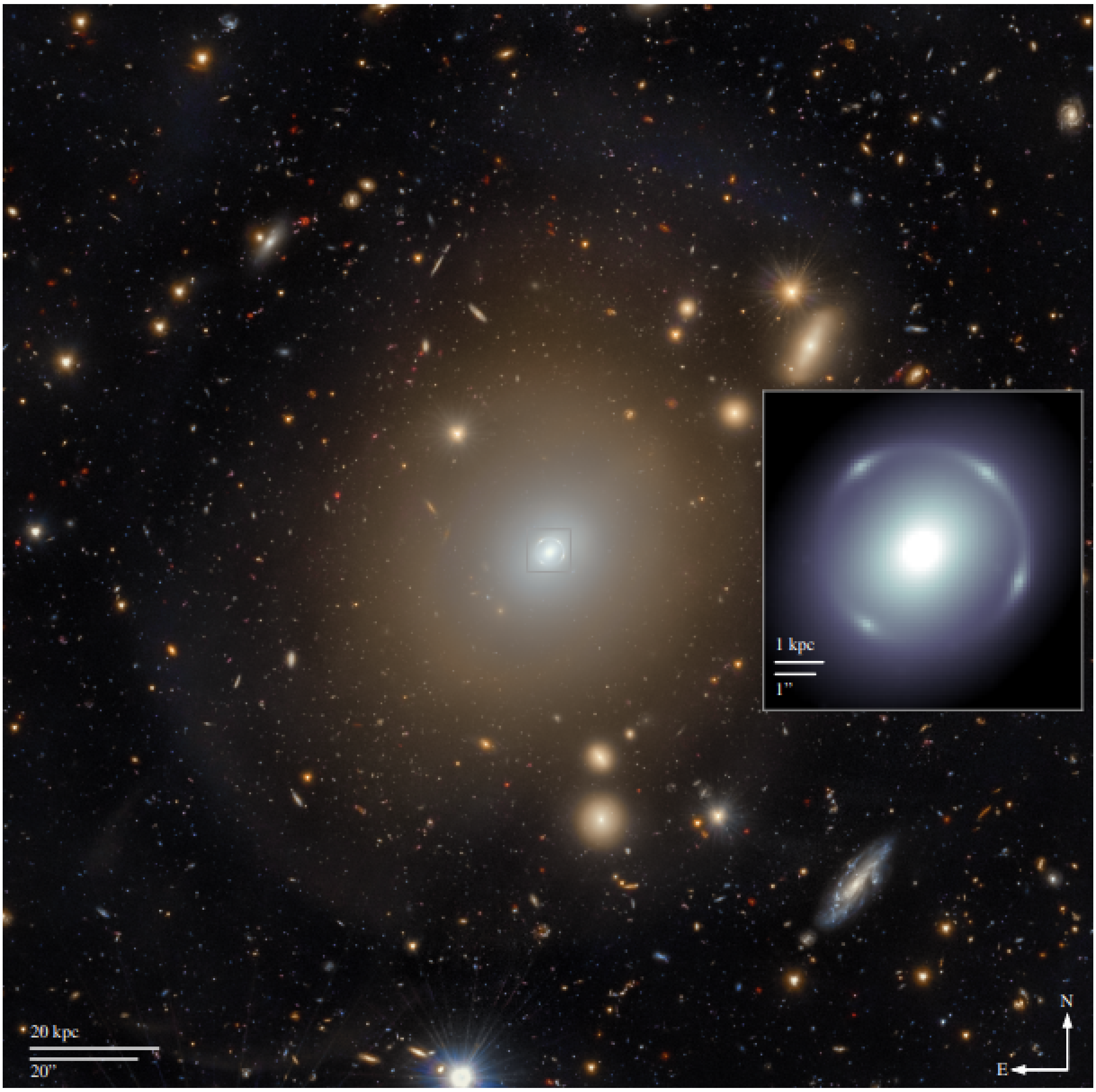
Нехай тепер для спостерігача джерело і лінза знаходяться на кутовій відстані $\beta \ll 1$ одне від одного.

Нарисуйте схему для опису фізичної картини, яку ми спостерігатимемо. Визначте кути, під якими ми спостерігатимемо зображення джерела. Відповідь подайте через параметри M, D_s, D_L, β та відомі константи.

3. Астрономічне фото дня 26.02.2025-NGC 6505.

Вам надано зображення повного кільця Ейнштейна навколо еліптичної галактики NGC 6505 з червоним зміщенням $z_L = 0.042$. Це перша, виявлена телескопом "Евклід", сильна гравітаційна лінза. Поєднання малого червоного зміщення галактики-лінзи, яскравого джерела та повноти кільця робить це надзвичайно рідкісним явищем, не спостережуваним до цього.

Із спектроскопічних даних було визначено червоне зміщення джерела $z_s = 0.406$.

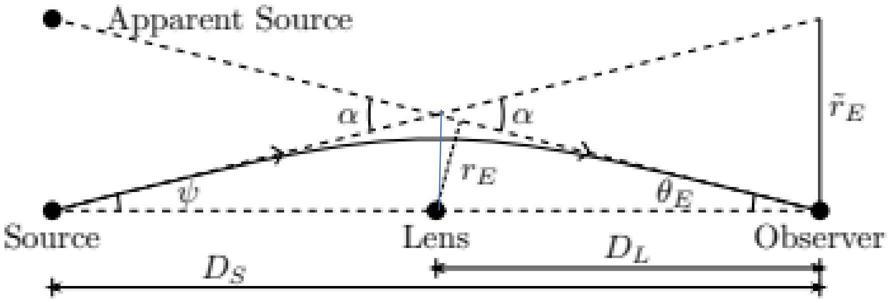


Якому з розглянутих вище варіантів відносного розташування спостерігача, джерела та лінзи відповідає дане зображення? Знайдіть ефективну масу «гравітаційної лінзи».

(10 балів)

Розв’язання

1.



З ходу променів стає зрозуміло, що джерело виглядатиме як кільце з кутовим радіусом θ_E (т.з. кільце Ейнштейна-Хвольсона).

З геометричних міркувань:

$$\psi+\theta_E=\alpha;\ \theta_E=\frac{L}{D_L};\ \psi=\frac{L}{D_s-D_L}=\frac{D_L}{D_s-D_L}\theta_E;\ \frac{D_L}{D_s-D_L}\theta_E+\theta_E=\alpha=\frac{D_s}{D_s-D_L}\theta_E=\frac{4GM}{r_Ec^2};\ r_E=D_L\theta_E;$$

$$\frac{D_s}{D_s-D_L}\theta_E=\frac{4GM}{D_L\theta_Ec^2}\Rightarrow\theta_E=\sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_s-D_L}{D_LD_s}}$$

2.

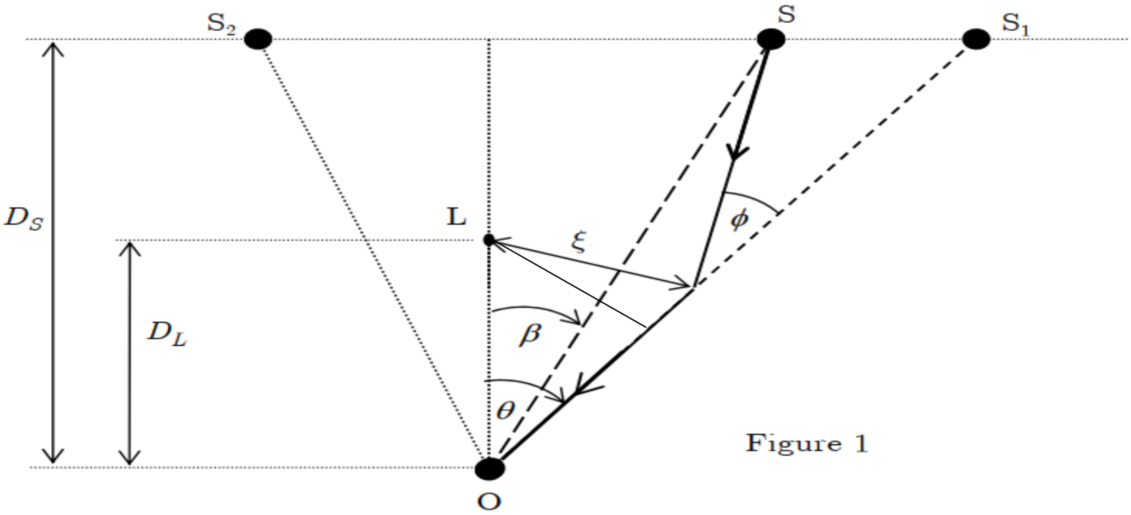


Figure 1

$$SA\approx LP\approx D_s-D_L;\ PS_1=PS+SS_1\approx PO\beta+SA\alpha=D_s\beta+\left(D_s-D_L\right)\alpha=Ds\theta;\ D_s\beta+\left(D_s-D_L\right)\frac{4GM}{bc^2}=Ds\theta;$$

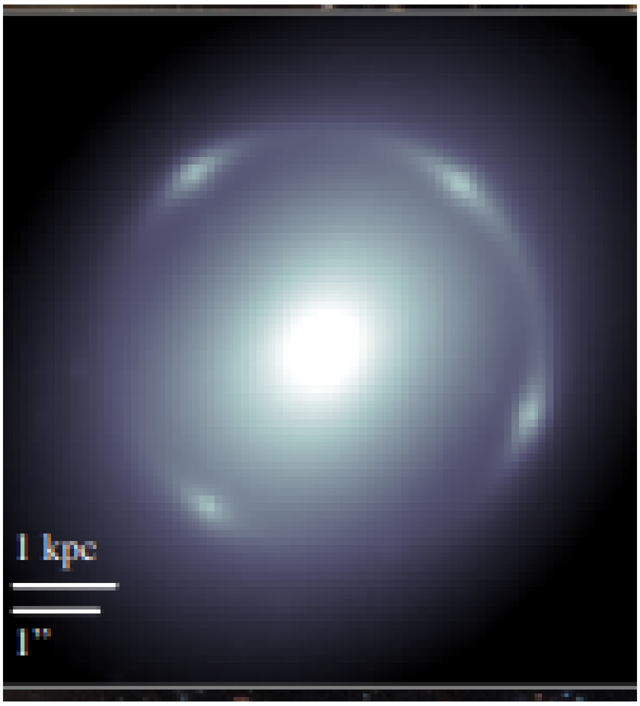
$$b=D_L\theta;\ D_s\beta+\left(D_s-D_L\right)\frac{4GM}{D_L\theta c^2}=Ds\theta;\ D_s\beta\theta+\left(D_s-D_L\right)\frac{4GM}{D_Lc^2}=Ds\theta^2;\ \theta^2-\beta\theta-\left(D_s-D_L\right)\frac{4GM}{D_LD_sc^2}=0$$

$$\theta=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2+16\left(D_s-D_L\right)\frac{GM}{D_LD_sc^2}}}{2}=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\theta_E^2}}{2}$$

У випадку, коли джерело не міститься на одній прямій з лінзою та спостерігачем, зображення джерела буде асиметричним.

3. На картинці ми спостерігаємо кільце, отже, реалізовується той рідкісний випадок, коли джерело, лінза та спостерігач перебувають на одній прямій.
Відстані до галактик:

$$D_L = \frac{z_L c}{H} = \frac{0.042 \cdot 3 \cdot 10^5 \frac{км}{с}}{70 \frac{км}{с\,Мпк}} = 180\,Мпк; \quad D_s = \frac{\frac{(1+z_s)^2 - 1}{(1+z_s)^2 + 1} c}{H} = \frac{\frac{(1+0.406)^2 - 1}{(1+0.406)^2 + 1} \cdot 3 \cdot 10^5 \frac{км}{с}}{70 \frac{км}{с\,Мпк}} = 1400\,Мпк$$



З рисунка видно, що $2\theta_E = 5.1'' \approx 2.5 \cdot 10^{-5}\ рад$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_s - D_L}{D_L D_s}} \Rightarrow M = \frac{c^2}{4G} \frac{D_L D_s}{D_s - D_L} \theta_E^2 = 1.7 \cdot 10^{11} M_{Sun}$$