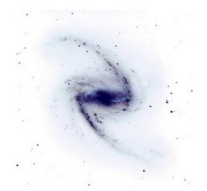


<p>ХІ Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії м. Львів, 31 березня – 5 квітня 2024 р.</p>		<p>Теоретичний тур 11 клас</p>
---	---	---

1. Комета.

Цікава комета, площина орбіти якої співпадає з площиною екліптики, пройде перигелій 21 квітня 2024 року, досягнувши блиску $3^m.3$, та матиме елонгацію 22° . Мінімальна відстань між кометою і Землею становитиме 1.546 а.о. 2 червня 2024 року. Велика піввісь орбіти комети – 17.2045 а.о., ексцентриситет – 0.9546.

Для моменту проходження перигелію кометою оцініть:

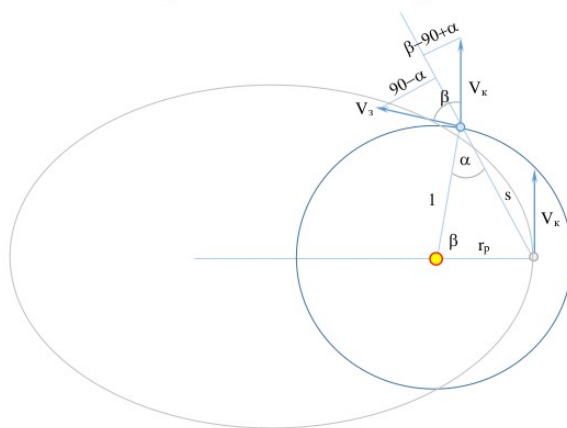
- відстань від комети до Сонця,
- відстань від комети до Землі,
- променеву та поперечну компоненти швидкості комети для спостерігача на Землі,
- дату наступного проходження перигелію кометою. **(10 балів)**

Розв'язування

а) $r_p = a(1-e)$, $r_p = 1,546(1-0,9546) = 0,7811$ а.о.

г) $T = a^{3/2}$, $T = 17,2045^{3/2} = 71,361$ рік = 71 рік 132 доби,
 21 квітня + 132 доби = 31 серпня, $T_{01} = 21.04.2024 + 71 \text{ рік } 132 \text{ доби} = 31.08.2095$.

б)



За теоремою косинусів $r_p^2 = s^2 + 1^2 - 2s \cos \alpha$, $s^2 - 2s \cos \alpha + 1^2 - r_p^2 = 0$,
 $s^2 - 1,8544s - 0,3899 = 0$,

$D = 1,879$, $s_{1,2} = \frac{1,8544 \pm \sqrt{1,879}}{2}$, $s_1 = 1,613$ а.о.

$s_2 = 0,242$ а.о. – не відповідає умові мінімальної відстані

в) швидкість комети у перигелії $V = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)}$

$V = 47,1$ км/с

Так як Земля в афелії на початку липня, у перигелії – на початку січня, вважаємо, що у

квітні відстань Землі від Сонця 1 а.о. Швидкість Землі $V_z = \sqrt{\frac{GM_\odot}{1 \text{ а.о.}}} = 29,8$ км/с

$\cos \beta = \frac{r_p^2 + 1^2 - s^2}{2r_p} = -0,634$,

$\beta = 129,3^\circ$

$V_k = 47,1$ км/с $V_z = 29,8$ км/с

$v_{\text{відн}}^2 = v_z^2 + v_k^2 - 2v_z v_k \cos \beta$,

$v_{\text{відн}} = 69,9$ км/с

$V_{\text{тк}} = V_k \cos(\beta + \alpha - 90) = 22,6$ км/с

$V_{\text{твідн}} = V_k - V_z = 11,4$ км/с

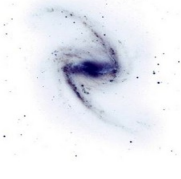
$V_{\text{тз}} = V_z \cos(90 - \alpha) = 11,2$ км/с

$V_{\text{тк}} = V_k \sin(\beta + \alpha - 90) = 41,3$ км/с

$V_{\text{тз}} = V_z \sin(90 - \alpha) = 27,6$ км/с

$V_{\text{твідн}} = V_k + V_z = 68,9$ км/с

Наступний перигелій відбудеться орієнтовно 30-31 серпня 2095 року.

<p>XI Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії м. Львів, 31 березня – 5 квітня 2024 р.</p>		<p>Теоретичний тур 11 клас</p>
---	---	---

2. Подвійна зоря.

Обидві зорі в подвійній системі є зорями головної послідовності. Промінь зору спостерігача лежить в площині орбіти цієї системи. Її річний паралакс становить $0''.168$. Одна компонента має радіус $1.01R_{\odot}$ та температуру фотосфери 6087 K . З кривої блиску з'ясовано, що глибина первинного мінімуму становить $0^m.544$, а вторинного – $0^m.086$. Визначте відстань до цієї зоряної системи, а також радіус та температуру другої компоненти. **(10 балів)**

Розв'язок

Відстань до подвійної зорі $r = \frac{1}{\pi} = 5,952\text{ пк} = 19,4\text{ св. р.}$

R_A – радіус більшої компоненти А, T_A – температура її фотосфери, R_B – радіус меншої компоненти В, T_B – її температура.

У максимуму блиску спостерігаємо обидві компоненти, під час первинного мінімуму – проходження меншої компоненти перед більшою, під час вторинного – видно лише більшу компоненту. Тоді з урахуванням законів Погсона, Стефана-Больцмана отримуємо

$$\frac{E_{max}}{E_{min1}} = \frac{\pi R_A^2 \sigma T_A^4 + \pi R_B^2 \sigma T_B^4}{\pi (R_A^2 - R_B^2) \sigma T_A^4 + \pi R_B^2 \sigma T_B^4} = \frac{R_A^2 T_A^4 + R_B^2 T_B^4}{(R_A^2 - R_B^2) T_A^4 + R_B^2 T_B^4}$$

$$\frac{E_{max}}{E_{min1}} = \frac{1 + \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^4}{1 - \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 + \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^4} = 2,512^{\Delta m_1} = 2,512^{0,544} = 1,6505;$$

$$\frac{E_{max}}{E_{min2}} = \frac{\pi R_A^2 \sigma T_A^4 + \pi R_B^2 \sigma T_B^4}{\pi R_A^2 \sigma T_A^4} = 1 + \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^4 = 2,512^{0,086} = 1,0824.$$

З цих рівнянь отримуємо, що $\frac{R_B}{R_A} \approx 0,6531$; $\frac{T_B}{T_A} \approx 0,6629$.

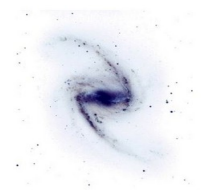
Тоді $R_B = 0,66R_{\odot}$, $T_B = 4035\text{ K}$.

3. Планетна система TOI-715.

Міжнародна група вчених на чолі з Джорджиною Дрансфілд (Georgina Dransfield) з Бірмінгемського університету, Велика Британія, у січні 2024 року опублікувала статтю «A 1.55 R_{\oplus} habitable-zone planet hosted by TOI-715, an M4 star near the ecliptic South Pole» в науковому журналі «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society».

У ній йдеться про відкриття суперземлі під назвою TOI-715 b, що обертається навколо крихітної червонуватої зорі, яка знаходиться «досить близько» до Сонця – всього за 138.49 світлових років. TOI-715 b за розмірами в півтора рази більша за Землю. Привабливості їй додає те, що вона розташована в зоні, придатній для життя.

Разом із цим існує припущення про існування другої планети в цій системі TOI-715 c. Друга планета може бути близькою за розмірами до Землі і перебувати також в зоні, придатній для життя (там, де рідка вода може існувати на поверхні планети).

<p>XI Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії м. Львів, 31 березня – 5 квітня 2024 р.</p>		<p>Теоретичний тур 11 клас</p>
---	---	---

Припустимо, що ця планета – копія Землі.

а) Якою має бути велика піввісь гіпотетичної планети *TOI-715 c*, щоб потік випромінювання від зорі на цю планету дорівнював земному?

б) Якою, в цьому випадку, може бути тривалість року на цій планеті?

в) Оцініть межі зони, придатної для життя, в системі *TOI-715* (ефективна температура планети має бути в діапазоні від 0 °C до 100 °C).

Параметри зорі *TOI-715*: $M = 0.225M_{\odot}$, $R = 0.24R_{\odot}$, $T = 3074$ К. Вважайте, що альbedo та парникові властивості атмосфери планети не залежать від спектрального складу випромінювання зорі і не змінюються при русі планети. **(10 балів)**

Розв'язок

1. Для того щоб тепловий режим на планеті залишався незмінним, таким же повинен залишатися потік енергії від зорі на відстані l . Цей потік дорівнює

$$F = \frac{L}{4\pi l^2} = \frac{4\pi\sigma R^2 T^4}{4\pi l^2} = \frac{\sigma R^2 T^4}{l^2}$$

Для збереження середньої температури повинен зберігатися середній потік, який визначається попередньою формулою підстановкою великої півосі a замість відстані l .

Таким чином, ми маємо:

$$\frac{R_e^2 T_e^4}{a^2} = \frac{R^2 T^4}{a^2} \Rightarrow a = a_{\oplus} \frac{RT^2}{R_e T_e^2} = 0,068 a.o.$$

Отже, параметри орбіти цієї планети: $a = 0,068$ а.о., ексцентриситет $e = 0,0167$.

2. Тривалість місцевого року можна знайти з III закону Кеплера, виражаючи велику піввісь в астрономічних одиницях, а масу – в масах Сонця:

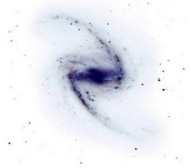
$$t = \sqrt{\frac{a^3}{M}} = \sqrt{\frac{0,068^3}{0,225}} = 0,037 \text{ років} = 13,5 \text{ днів}$$

3. Якщо припустити, що зоря випромінює ізотропно і планета знаходиться на великій відстані від зорі, потужність, яку поглинає планета, визначається розглядом планети як диска радіуса r , який перехоплює частину потужності, яка розподіляється по поверхні сфери радіуса D (відстань планети від зорі). Розрахунок передбачає, що планета відбиває частину вхідного випромінювання за допомогою параметра, який називається альbedo (a). Альbedo 1 означає, що все випромінювання відбивається, альbedo 0 означає, що все випромінювання поглинається (альbedo для Землі – 0,37). Тоді вираз для поглиненої потужності такий:

$$P_{\text{погл}} = \frac{L\pi r^2(1-a)}{4\pi D^2} = \frac{4\pi R^2\sigma T^4 r^2(1-a)}{4D^2} = \frac{\pi R^2\sigma T^4 r^2(1-a)}{D^2}$$

Наступне припущення, яке ми можемо зробити, це те, що вся планета має однакову температуру T і що планета випромінює як чорне тіло. Закон Стефана-Больцмана дає вираз для потужності, яку випромінює планета:

$$P_{\text{випр}} = 4\pi r^2 \sigma T_{\text{пл}}^4$$

<p align="center">XI Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії м. Львів, 31 березня – 5 квітня 2024 р.</p>		<p align="center">Теоретичний тур 11 клас</p>
--	---	---

Прирівнювання цих двох виразів і перегрупування дає вираз для знаходження меж зони, придатної для життя:

$$\frac{\pi R^2 \sigma T^4 r^2 (1-a)}{D^2} = 4\pi r^2 \sigma T_{\text{пл}}^4 \Rightarrow D = \frac{T^2 R}{2T_{\text{пл}}^2} \sqrt{(1-a)}$$

На деякій відстані від зорі температура на поверхні планети дорівнюватиме $T_K = 373 \text{ K}$ (температура кипіння води на Землі за нормальних умов). Саме це значення дає ближню межу D_{min} , де вода може перебувати в рідкому стані. Із віддаленням планети від зорі, повна світлова енергія, що потрапляє на її поверхню, зменшується й на деякій відстані від зорі температура поверхні планети буде $T_3 = 273 \text{ K}$ (температура замерзання води на Землі за нормальних умов). Ця відстань дає зовнішню межу D_{max} , до якої вода ще може існувати у рідкому стані.

$$D_{\text{min}} = \frac{T^2 R}{2T_K^2} \sqrt{(1-a)} = \frac{3074^2 \cdot 0,24 \cdot 6,95 \cdot 10^8}{2 \cdot 373^2} \sqrt{(1-0,37)} = 0,03 \text{ a.o.}$$

$$D_{\text{max}} = \frac{T^2 R}{2T_3^2} \sqrt{(1-a)} = \frac{3074^2 \cdot 0,24 \cdot 6,95 \cdot 10^8}{2 \cdot 273^2} \sqrt{(1-0,37)} = 0,056 \text{ a.o.}$$

Під час визначення інтервалу зони, придатної для життя, слід враховувати багато факторів, одним з яких є вплив додаткових парникових газів, таких як CH_4 і H_2 . Наявність цих газів робить цю зону дещо ширшою ніж та, що передбачається класичним визначенням «habitable zone».

4. Холодні фотони.

Сонце робить один оберт навколо центру Галактики за $T=230$ млн років, а радіус орбіти Сонця дорівнює $R=27$ тис. св. років.

а) У припущенні, що вся маса Галактики складається з баріонної (видимої) матерії, оцініть середню густину баріонної матерії у Всесвіті. Вважайте, що всі галактики є схожими на Чумацький Шлях, а середня відстань між галактиками дорівнює $L=3$ Мпк.

б) З дослідження первинного нуклеосинтезу відомо значення баріон-фотонного відношення:

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} = 5 \cdot 10^{-10},$$

де n_b, n_γ - середні концентрації баріонів та реліктових фотонів відповідно. Для реліктових фотонів також існує зв'язок між їх концентрацією та температурою:

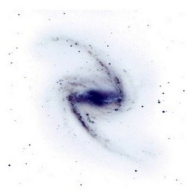
$$n_\gamma = 16\pi \cdot \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3$$

де $\zeta(3) \approx 1.2$. Використовуючи ці результати, оцініть сучасну температуру реліктового випромінювання. Використайте припущення, що вся баріонна матерія у Всесвіті складається з водню Н. **(10 балів)**

Розв'язок

Оцінку для маси Галактики M отримаємо, якщо запишемо р-ня Ньютона для руху Сонця у гравітаційному полі маси M

$$M_\odot \omega^2 R = \frac{GM M_\odot}{R^2}$$

<p align="center">XI Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії м. Львів, 31 березня – 5 квітня 2024 р.</p>		<p align="center">Теоретичний тур 11 клас</p>
---	---	--

Підставивши $\omega = \frac{2\pi}{T}$, отримуємо для оцінки маси Галактики:

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \approx 1.9 \cdot 10^{41} \text{ кг} = 10^{11} M_{\odot}$$

Якщо середня відстань між галактиками L , то на одну галактику припадає простір об'ємом L^3 . Тоді середня густина баріонної матерії, у припущенні що всі галактики схожі на Чумацький Шлях і мають однакову масу:

$$\rho_b = \frac{M}{L^3} \approx 2.4 \cdot 10^{-28} \text{ кг/м}^3$$

Щоб знайти концентрацію реліктових фотонів, обчислимо середню концентрацію баріонів. Для цього вважаємо, що вся баріонна матерія у Всесвіті складається з гідрогену H. Оскільки маса електрона набагато менша за масу протона, то практично всю масу Всесвіту складають протони. Тоді концентрацію баріонів

$$n_b = n_p = \frac{M}{m_p \cdot L^3} = 0.14 \text{ м}^{-3}$$

З баріон-фотонного відношення знаходимо концентрацію реліктових фотонів

$$n_\gamma = \frac{n_b}{\eta} = 2.9 \cdot 10^8 \text{ м}^{-3}$$

Нарешті, температура реліктового випромінювання

$$T_{rel} = \frac{hc}{k_B} \left(\frac{n_\gamma}{16\pi \cdot \zeta(3)} \right)^{\frac{1}{3}} = 2.4 \text{ К},$$

що досить близьке до реального значення $T_{rel} = 2.725 \text{ К}$, отриманого зі спостережень реліктового фону.

5. Гравітаційна дисипація.

З теорії відомо, що потужність випромінювання енергії гравітаційних хвиль подвійною системою визначається з формули:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{-32}{5} \frac{G^4 (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2)}{(cr)^5}$$

де r — поточна відстань між тілами, t — час, G — гравітаційна стала, c — швидкість світла, m_1 і m_2 — маси тіл подвійної системи.

а) Знайдіть закон зміни відстані між тілами від часу

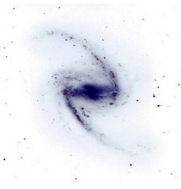
б) Встановіть час, необхідний для злиття компонентів системи ($t_{\text{злиття}}$)

в) Покажіть, що в першому наближенні зменшення відстані між тілами внаслідок дисипації енергії на випромінювання гравітаційних хвиль можна подати формулою

$$r(t) = r_0 \left(1 - \frac{t}{t_{\text{злиття}}} \right)^{\frac{1}{4}},$$

де r_0 — початкова відстань між компонентами.

(10 балів)

<p>ХІ Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії м. Львів, 31 березня – 5 квітня 2024 р.</p>		<p>Теоретичний тур 11 клас</p>
---	---	---

Розв'язок

1) З теореми віріала слідує, що механічна енергія системи двох гравітаційно пов'язаних мас знаходиться з формули

$$E_{\text{мех}} = - \frac{G m_1 m_2}{2r}. \quad (1)$$

Запишемо виходячи з (1) зміну цієї енергії при зміні відстані на dr

$$dE_{\text{мех.}} = G m_1 m_2 \frac{dr}{2r^2} = \frac{dE_{\text{мех.}}}{dt} dt,$$

звідси

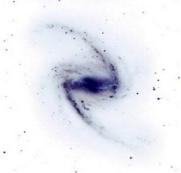
$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dE_{\text{мех.}}}{dt} \frac{2r^2}{G m_1 m_2} = P \frac{2r^2}{G m_1 m_2} = - \frac{32 G^4 m_1^2 m_2^2}{5 c^5 r^5} (m_1 + m_2) \frac{2r^2}{G m_1 m_2} = \\ &= - \frac{64 G^3 m_1 m_2}{5 c^5 r^3} (m_1 + m_2). \end{aligned}$$

Отже

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{64 G^3 m_1 m_2}{5 c^5 r^3} (m_1 + m_2). \quad (2)$$

2) з (2):

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= - \frac{64 G^3 m_1 m_2}{5 c^5 r^3} (m_1 + m_2) \rightarrow r^3 dr = \\ &= - \frac{64 G^3 m_1 m_2}{5 c^5} (m_1 + m_2) dt \rightarrow (r^4/4) - (r_0^4/4) = \\ &= - \int_0^t \frac{64 G^3 m_1 m_2}{5 c^5} (m_1 + m_2) dt \rightarrow \\ r &= \left(r_0^4 - \frac{256 G^3 m_1 m_2}{5 c^5} (m_1 + m_2) t \right)^{1/4} \\ \rightarrow t_{\text{злиття}} &= \frac{5}{256 G^3 (m_1 + m_2) m_1 m_2} r_0^4 c^5 \\ t_{\text{злиття}} &= \frac{5}{256 G^3 (m_1 + m_2) m_1 m_2} r_0^4 c^5 \quad (3) \end{aligned}$$

<p>ХІ Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії м. Львів, 31 березня – 5 квітня 2024 р.</p>		<p>Теоретичний тур 11 клас</p>
---	---	---

3) Виходячи з (3), маємо

$$\frac{5}{64} \frac{c^5}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} = \frac{4 t_{\text{злиття}}}{r_o^4} \rightarrow \frac{64 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5} = \frac{r_o^4}{4 t_{\text{злиття}}}$$

Остання рівність разом з (2):

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{64 G^3 m_1 m_2}{5 c^5 r^3} (m_1 + m_2)$$

приводить до рівняння

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{r_o^4}{4 t_{\text{злиття}} r^3}$$

Звідси, після інтегрування, маємо

$$r(t) = r_o \left(1 - \frac{t}{t_{\text{злиття}}} \right)^{1/4}$$

Деякі параметри та фізичні сталі:

маса Сонця $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30}$ кг, радіус Сонця $R_{\odot} = 6.95 \cdot 10^8$ м, ефективна температура Сонця $T_{\odot} = 5778$ К, велика піввісь орбіти Землі $a_{\oplus} = 1$ а.о. = 149.6 млн. км, ексцентриситет $e_{\oplus} = 0.0167$.

Стала Планка $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, стала Больцмана $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, гравітаційна стала $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг с²).