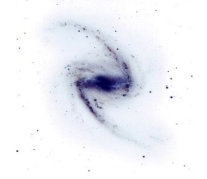


<p align="center">XII Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</p> <p align="center">м. Львів,</p> <p align="center">15 березня – 19 березня 2025 р.</p>		<p align="center">Теоретичний тур</p> <p align="center">10 клас</p>
---	---	---

1. Екзопланета пульсара.

1991 року польський астроном Александр Вольщан, вивчаючи на радіотелескопі в Аресібо пульсар PSR 1257+12 («Ліч»), помітив періодичну зміну частоти надходження радіоімпульсів від нього. Так була відкрита перша екзопланетна система у пульсара (на той час вона взагалі вважалась першою підтвердженою екзопланетною системою). Згодом були відкриті екзопланети ще у двох пульсарів.

Уявимо собі пульсар масою $M_*=1.5$ сонячних, що обертається навколо власної осі з періодом $P=500$ мілісекунд. Оскільки вісь обертання не збігається з магнітною віссю, один з магнітних полюсів періодично спрямовується в сторону Землі, та ми реєструємо від нього короткі імпульси радіовипромінювання. Яка може бути максимальна зміна проміжків часу між зареєстрованими імпульсами Δt (порівняно з періодом осьового обертання пульсара) в результаті того, що пульсар рухається навколо спільного центру мас з екзопланетою масою $M_{pl}=3$ маси Юпітера, якщо радіус орбіти екзопланети $a_{pl} = 0.01$ а.о.? Маса Юпітера $1.9 \cdot 10^{27}$ кг.

(10 балів)

Розв'язання

Зміна проміжків часу пов'язана зі зміною відстані «пульсар-спостерігач» (унаслідок руху пульсара навколо центра мас екзопланетної системи). Як наслідок, електромагнітний імпульс долає різну відстань до спостерігача. Максимальна зміна проміжків часу між зареєстрованими імпульсами буде, тоді пульсар рухається до нас (або від нас) уздовж своєї орбіти навколо центра мас. Для цього промінь зору має лежати у площині орбіти. Різниця проміжків часу (порівняно з періодом осьового

обертання пульсара) дорівнюватиме $\Delta t = \frac{v_* P}{c}$, де c – швидкість світла, а v_* - швидкість зорі (пульсара). Знайдемо орбітальну швидкість зорі відносно центра мас. Для цього спочатку

розрахуємо швидкість планети. Це можна зробити за формулою колової швидкості $v = \sqrt{\frac{GM_*}{a_{pl}}}$ або

за третім законом Кеплера знайти період $T = T_{\oplus} \sqrt{\frac{a_{pl}^3}{M_*}}$, а потім за формулою $v = \frac{2\pi a_{pl}}{T}$. Отримуємо швидкість планети 365 км/с.

Швидкості зорі та планети відносяться як $\frac{v_*}{v_{pl}} = \frac{M_{pl}}{M_*}$, отже, швидкість зорі буде 695 м/с.

Підставляємо у формулу $\Delta t = \frac{v_* P}{c}$ й отримуємо $\Delta t = 1.2$ мкс.

2. Комета наближається.

Космічний апарат, що знаходився поблизу Сонця, зареєстрував комету, що рухалася на відстані $r=5$ а.о. від Сонця, змінюючи свою геліоцентричну екліптичну довготу на $\Delta \lambda = 0.03^\circ$ за добу та маючи променеву швидкість $v_r = 14.5$ км/с. Обчислення показали, що комета має орбіту, яка лежить у площині екліптики та має перигелійну відстань 0.5 а.о.

1. Чи може ця комета бути періодичною? Якщо так, який її період обертання навколо Сонця?
2. Яку швидкість буде мати ця комета при проходженні орбіти Землі? Під яким кутом вона перетинає орбіту Землі (кут між напрямком швидкості комети та дотичною до орбіти Землі)? Орбіту Землі вважати коловою.

(10 балів)

Розв'язання

1) Розрахуємо повну швидкість комети, перевівши градуси на добу у км/с тангенціальної швидкості:

$$v = \sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda \cdot r \cdot \pi \cdot 150 \cdot 10^6}{180 \cdot 24 \cdot 3600}\right)^2 + v_r^2} = 15.2 \text{ км/с}$$

Обчислимо велику піввісь з інтегралу енергії: $v^2 = GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$, $a = 7.1$ а.о.

Вона вийшла додатною, отже, орбіта еліптична та комета періодична. Період обертання знайдемо з 3-го закону Кеплера $T = a^{3/2} = 19.0$ років.

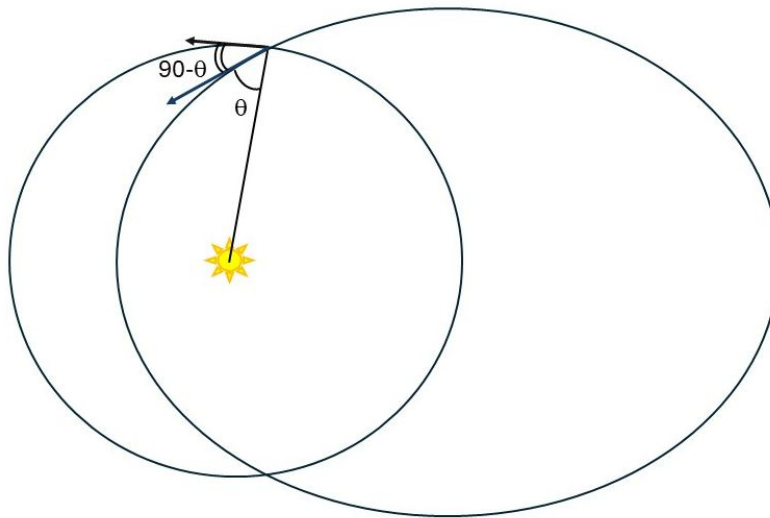
2) Знайти швидкість комети при перетині земної орбіти знову допоможе інтеграл енергії при $r = 1$ а.о.: $v_1 = 40.7$ км/с.

Знайдемо кут між напрямком руху комети та її радіус-вектором (рис.). Для цього спочатку аналогічно знайдемо швидкість комети у перигелії (58.5 км/с), коли її радіус-вектор перпендикулярний до вектора швидкості, та застосуємо закон збереження моменту імпульсу:

$$v_1 r_1 \sin \theta = v_q r_q \sin 90$$

Другий варіант: можна також обчислити кут між радіусом-вектором і швидкістю на відстані $r = 5$ а.о., адже нам відомі компоненти швидкості, та застосувати закон збереження моменту імпульсу до точок $r = 5$ а.о. та $r = 1$ а.о.

Одним із цих способів отримуємо кут 46.0° . Позаяк дотична до колової орбіти Землі перпендикулярна до радіуса, то кут між дотичною до орбіти Землі та швидкістю комети дорівнює $90^\circ - 45.7^\circ = 44.0^\circ$.



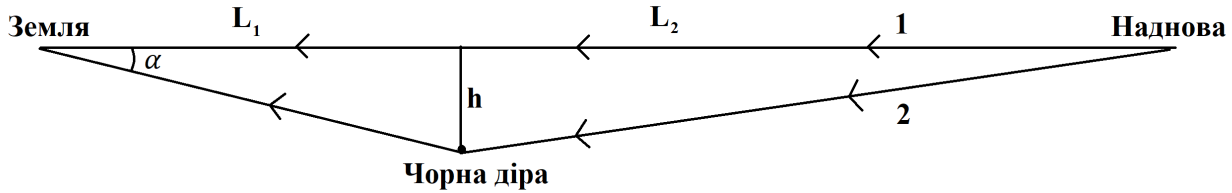
3. Несподіваний сигнал.

1 січня деякого року астрономи спостерігали вибух наднової, після чого вдалося порахувати червоне зміщення цього об'єкта $z = 0.04$. Рівно через 5 років вони отримали сигнал від ще одної наднової, схожий на попередній. Кутова відстань між ділянками неба, з яких прийшли сигнали, складає $\alpha = 46''$. Було припущено, що другий сигнал потрапив до нас після гравітаційного заломлення біля деякої чорної діри. Знайдіть відстань до цієї чорної діри. Вважайте, що напрям променя змінюється в малій області поблизу чорної діри. Значення сталої Габбла прийміть $H = 69 \text{ км/с} \cdot \text{Mpk}$. При розв'язанні може бути корисною наближена формула $(1+x)^a \approx 1+ax$, якщо $x \ll 1$.

(10 балів)

Розв'язання

На рисунку зображені шляхи обох променів:



Часова затримка між обома сигналами зумовлена різною відстанню, яку проходять промені. Перший промінь пройшов відстань $l_1 = L_1 + L_2$, тоді як другий пройшов:

$$l_2 = \sqrt{L_1^2 + h^2} + \sqrt{L_2^2 + h^2}$$

Враховуючи, що $h \ll L_1, L_2$, можна записати:

$$l_2 = L_1 \sqrt{1 + \frac{h^2}{L_1^2}} + L_2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{L_2^2}} \approx L_1 \left(1 + \frac{h^2}{2L_1^2}\right) + L_2 \left(1 + \frac{h^2}{2L_2^2}\right).$$

Тоді різниця пройдених відстаней

$$\Delta L = l_2 - l_1 = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = c \Delta t,$$

де $\Delta t = 5$ років. Можемо обчислити відстань до наднової:

$$L_1 + L_2 = \frac{cZ}{H} = 174 \text{ Мпк}.$$

Використавши, що $h = L_1 \cdot \alpha$, отримуємо:

$$c \Delta t = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{L_1}{L_2} (L_1 + L_2),$$

звідки знаходимо відношення:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\alpha^2 (L_1 + L_2)}{2c \Delta t} = 2.82.$$

У результаті отримуємо відстань до чорної діри:

$$L_1 = 46 \text{ Мпк}.$$

4. Спостереження зорі в галактиці Андромеди.

Наскільки великий діаметр дзеркала повинен мати телескоп, щоб за його допомогою можна було б зареєструвати зорю, таку як Сонце, яка знаходиться в галактиці Андромеди за час накопичення сигналу 1 година?

Вихідні дані:

- 1) для достовірної реєстрації зорі потрібно зареєструвати принаймні 25 фотонів з цієї зорі (відповідає відношенню сигналу до статистичного шуму $S/N=5$);
- 2) спостереження ведуться через V-фільтр з максимумом пропускання на довжині хвилі 0.55 мкм та шириною фільтра 0.1 мкм;
- 3) через недоліки оптики і реєструючого пристрою реєструються лише 50% фотонів, які прилітають від зорі;
- 4) фон неба відсутній;
- 5) відстань до галактики Андромеди 2.2 мільйона світлових років;
- 6) абсолютна зоряна величина Сонця у V фільтрі рівна 4.83;
- 7) потік у фільтрі V зорі з нульовою видимою зоряною величиною ($m_V=0$) дорівнює $9.97 \cdot 10^{10}$ фотонів $\text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{мкм}^{-1}$ (фотонів за секунду на метр квадратний площі в діапазоні довжин хвиль 1 мкм).

(10 балів)

Розв'язання

Видима зоряна величина зорі:

$$m = M + 5 \times (\log_{10}(D[\text{пк}]) - 1)$$

Підставляючи $M = 4.83$ та $D = 2.2 \times 10^6 / 3.26 = 6.75 \times 10^5$ пк, отримуємо, що видима зоряна величина сонцеподібної зорі з галактики Андромеди дорівнює $m = 28.98$.

Кількість фотонів, які надходять від зорі за одну годину через одиницю площі, дорівнює

$$N = N_0 \times 2.512^{-m}$$

де $N_0 = 0.1 \text{ мкм} \times 3600 \text{ с} \times 9.97 \times 10^{10} \text{ фотонів } \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{мкм}^{-1} = 3.59 \times 10^{13}$ фотонів м^{-2} — кількість фотонів через одиницю площі від зорі з нульовою видимою зоряною величиною у фільтрі V завширшки 0.1 мкм. Підрахунок дає $N = 91.8$ фотонів м^{-2} .

За умовою, лише половина фотонів буде задетектована. Тому площу S дзеркала телескопа визначаємо з рівності:

$$25 = 0.5 \times N \times S,$$

$$\text{звідки } S = 2 \times 25 / 91.8 = 0.545 \text{ м}^2$$

Позаяк $S = \pi D^2 / 4$, то $D = (4S/\pi)^{1/2} = 0.83 \text{ м}$.

5. Народження рою метеороїдів.

Спостерігаючи за кометою, астрономи помітили раптове зростання блиску її ядра на $\Delta m = 4.89$ зоряної величини. Провівши додаткові дослідження, цю подію класифікували як розпад ядра комети. У момент розпаду ядра комета знаходилась на відстані $\Delta = 6.472$ а.о. від Землі та $L = 5.819$ а.о. від Сонця, рухаючись орбітою з ексцентриситетом $\varepsilon = 0.672$ і великою піввіссю $a = 15.104$ а.о. Блиск ядра безпосередньо перед розпадом $m_{\text{я}} = +17.89^m$. Коли комета була на мінімальній відстані $l = 4.882$ а.о. від Землі, методами інтерферометрії отримали радіозображення ядра. Виявилось, що ядро кулястої форми і в цей момент часу мало кутовий діаметр $\rho = 3.88 \cdot 10^{-3}$ ". Врахуйте також деякі модельні наближення:

- ◆ уламки ядра після розпаду рухаються тією ж орбітою, що й комета до розпаду;

- ◆ всі уламки мають однаковий діаметр;
- ◆ альbedo поверхні уламків 0.354;
- ◆ уламки втратили можливість утворювати хвости;
- ◆ розсіювання світла поверхнею ядра комети та уламками – дифузне.

Визначте, чи можливе спостереження поодинокого уламку комети в афелії його орбіти в момент опозиції в телескоп Габбла з проникною здатністю $m_G = +29.48^m$?

Всі фотометричні величини задані у фільтрі V. Видима зоряна величина Сонця $m_V = (-26.78^m)$. Орбіта Землі – колова з радіусом 1.000 а.о. Нахил орбіти комети дорівнює нулю. Всі висновки мають бути підтверджені розрахунками! **(10 балів)**

Розв'язання

Знайдемо діаметр ядра $D_{\text{я}}$ комети

$$D_{\text{я}} = \rho l = 3.88 \times 10^{-3} \times 4.882 / 206265 \approx 9.179 \times 10^{-8} \text{ а.о.} \approx 13.73 \text{ км.} \quad (*)$$

Блиск несамосвітнього астрономічного об'єкту можна визначити за формулою:

$$E^* = A\pi \frac{D^2}{4} \frac{I_C}{L^2 \Delta^2} f(\Phi), \quad (1)$$

де A – альbedo, D – діаметр, а $f(\Phi)$ – функція фази астрономічного об'єкта; I_C – сила світла Сонця ($I_C \approx 3.84 \times 10^{28}$ Кд).

Водночас, блиск Сонця на поверхні Землі

$$E^*_c = \frac{I_C}{1^2}. \quad (2)$$

З (1), (2) та з формули Погсона

$$(E^*/E^*_c) = (A_{\text{я}}\pi \frac{D^2}{4} \frac{1}{L^2 \Delta^2} f(\Phi)) = 2.512^{m_V - m_{\text{я}}}. \quad (**)$$

При розпаді ядра зберігається об'єм. За умовою, ядро та його уламки – сферичні тіла, причому діаметри всіх уламків однакові. Це дає змогу отримати рівність для кількості N уламків, що утворились при розпаді ядра комети:

$$N = \left(\frac{D_{\text{я}}}{D_{\text{ул}}} \right)^3, \quad (****)$$

де $D_{\text{ул}}$ – діаметр уламків.

Загальна площа поверхні уламків S_{Σ}

$$S_{\Sigma} = N \times \pi \frac{D_{\text{ул}}^2}{4},$$

що разом із (****) дає:

$$S_{\Sigma} = \left(\frac{D_{\text{я}}}{D_{\text{ул}}} \right)^3 \times \pi \frac{D_{\text{ул}}^2}{4} = \frac{1}{D_{\text{ул}}} \times \pi \frac{D_{\text{я}}^3}{4}. \quad (3)$$

Площа поверхні ядра до його розпаду

$$S_{\text{я}} = \pi \frac{D_{\text{я}}^2}{4}. \quad (4)$$

Відношення загальної площі поверхні уламків до площі поверхні ядра знаходимо з (3) та (4):

$$S_{\Sigma}/S_{\text{я}} = \frac{D_{\text{я}}}{D_{\text{ул}}}. \quad (5)$$

З (5) бачимо, що відношення $S_{\Sigma}/S_{\text{я}}$ більше за одиницю. Цим пояснюється зростання блиску комети відразу після розпаду її ядра.

З урахуванням (*), (5), альbedo ядра та його уламків, а також з формули Погсона маємо:

$$2.512^{\Delta m} = 1.22 \times (S_{\Sigma}/S_{\text{я}}) = 1.22 \times \frac{D_{\text{я}}}{D_{\text{ул}}},$$

звідси

$$D_{\text{ул}} \approx 0.185 \text{ км} = 185 \text{ м} \approx 1.230 \times 10^{-9} \text{ а.о.} \quad (\text{*****})$$

Знайдемо відстань від Сонця до афелію орбіти уламків:

$$r_a = a(1 + \epsilon) \approx 25.254 \text{ а.о.} \quad (')$$

Очевидно, що відстань в опозиції від Землі до уламків в їхньому афелії буде дорівнювати

$$r_{a3} \approx 24.254 \text{ а.о.} \quad (')$$

Запишемо (**) для спостереження уламків ядра комети в афелії їхньої орбіти, врахувавши, що в цьому випадку в (**) під E^* треба розуміти блиск $E_{\text{ул}}^*$ окремого уламку, замість $A_{\text{я}}$ – значення $A_{\text{ул}}$ альbedo уламків, під D – їхній діаметр $D_{\text{ул}}$. Функцію фази в цей час будемо вважати $1/0.996 \approx 1.004$, тому що під час опозиції фазовий кут дорівнює нулю, а в момент утворення уламків їхня фаза дорівнювала 0.996. Також тепер замість $m_{\text{я}}$ покладаємо $m_{\text{ул};a}$ – видимої зоряну величину уламку в опозиції, а замість L та Δ покладаємо r_a та відповідно. У підсумку маємо:

$$(E_{\text{ул}}^*/E_{\text{с}}^*) = (A_{\text{ул}} \pi \frac{D_{\text{ул}}^2}{4} \frac{1}{r_a^2 r_{a3}^2} \times 1.004) = 2.512^m v^{-m_{\text{ул};a}}. \quad (6)$$

З умови (***), (*****), (') та (') після елементарних перетворень отримуємо

$$m_{\text{ул};a} \approx +33.09,$$

що набагато менше за проникну здатність телескопу Габбла.

Відповідь: за допомогою КТ ім. Габбла **неможливо** проводити спостереження за уламком ядра комети в афелії його орбіти.