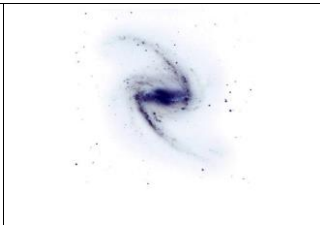


**ХІІ Всеукраїнська учнівська  
олімпіада з астрономії  
м. Львів,  
15 березня – 19 березня 2025 р.**



**Практичний тур**

**11 клас**

**1. Вік зоряних скупчень.**

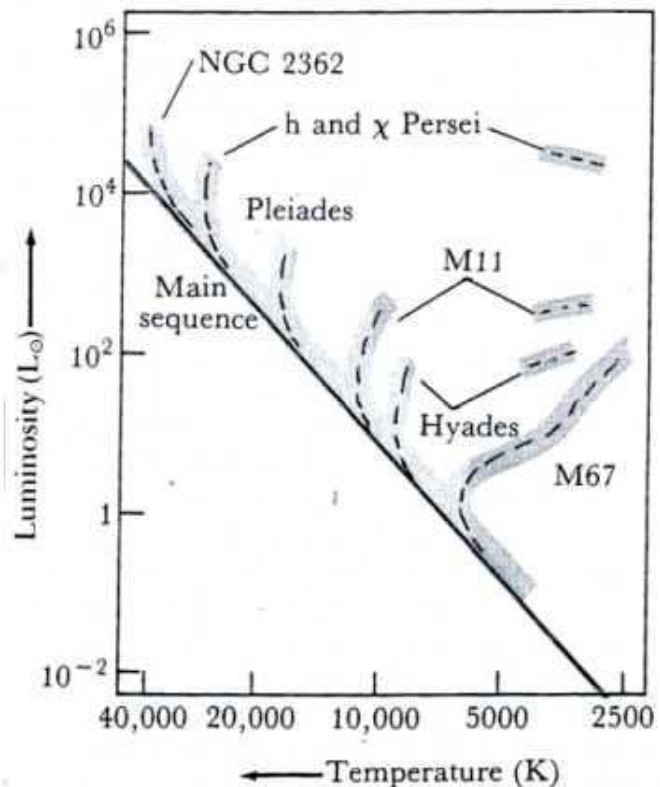
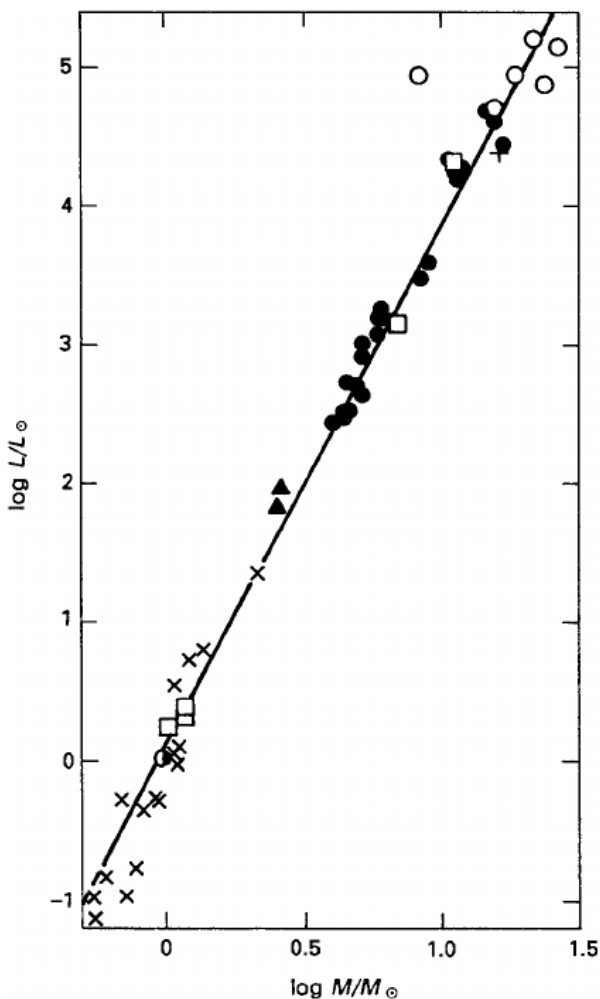
**I)** Побудуйте графіки для залежностей тривалості життя зір на головній послідовності від їхньої маси та світності, використавши графік залежності світності від маси. Графіки побудуйте в логарифмічній шкалі у сонячних одиницях. Для побудови графіків проведіть розрахунки щонайменше для трьох різних значень.

**II)** Визначте вік зоряних скупчень, вказаних на діаграмі Герцшпрунга-Рассела внизу праворуч (на діаграмі світність зір наведено в одиницях світності Сонця).

Припускаємо: а) світність зір протягом їхнього життя на головній послідовності не змінюється; б) 0.7 % від маси протонів, що об'єднуються в ядра гелію під час реакцій синтезу, виділяється як теплова енергія; в) зорі утворюються з воднево-гелієвого газу, початкова кількість атомів водню у якому складає 92 %, а атомів гелію 8 %; г) зоря припиняє своє існування як зоря головної послідовності, коли водень у її центральній частині, маса якої складає 13 % від маси всієї зорі, перетворюється на гелій; д) моментом сходження зір з головної послідовності на діаграмі Герцшпрунга-Рассела вважайте точку, дотична у якій є строго вертикальною.

Світність Сонця  $L_{\odot} = 3.83 \times 10^{26}$  Вт, маса Сонця  $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}$  кг.

На рисунку ліворуч вказано отриману зі спостережень подвійних зоряних систем залежність між світністю зір та їхньою масою, вираженою в сонячних одиницях. **log** позначає десятковий логарифм **lg** або, що те саме, **log<sub>10</sub>**.



**(10 балів)**

## Розв'язок

Г) Визначаємо масу водню у щойно сформованій зорі, беручи до уваги, що маса атома гелію в 4 рази більша від маси атома водню. Отож масова частка водню у щойно сформованій зорі складатиме

$$0.92/(0.92+4 \times 0.08)=0.74$$

Кількість енергії, яку зоря виділить за весь час свого існування на головній послідовності, дорівнює

$$0.007 \times 0.74 \times 0.13 \times M_3 c^2$$

Тривалість життя зорі на головній послідовності дорівнює

$$t_3 = 0.007 \times 0.74 \times 0.13 \times M_3 c^2 / L_3$$

Підставляючи маси та світності зір з графіка, отримуємо:

1) для Сонця ( $L_\odot = 3.83 \times 10^{26}$  Вт,  $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$  кг) матимемо

$$t_\odot = 0.007 \times 0.74 \times 0.13 \times 1.99 \times 10^{30} \times (3.00 \times 10^8)^2 / (3.83 \times 10^{26}) = 3.15 \times 10^{17} \text{ с} = 9.98 \text{ мільярдів років.}$$

2) для інших зір розрахуємо за допомогою величин, розрахованих для Сонця:

$$t_3 = t_\odot \times (M_3 / M_\odot) / (L_3 / L_\odot),$$

або

$$\log(t_3 / t_\odot) = \log(M_3 / M_\odot) - \log(L_3 / L_\odot),$$

Для точки на графіку з координатами  $\log(M_3 / M_\odot) = 0.5$  та  $\log(L_3 / L_\odot) = 1.9$  матимемо

$$\log(t_3 / t_\odot) = -1.4 \text{ або } t_3 = t_\odot \times 10^{-1.4} = 396.2 \text{ мільйонів років.}$$

Для точки на графіку з координатами  $\log(M_3 / M_\odot) = 1.0$  та  $\log(L_3 / L_\odot) = 3.8$  матимемо

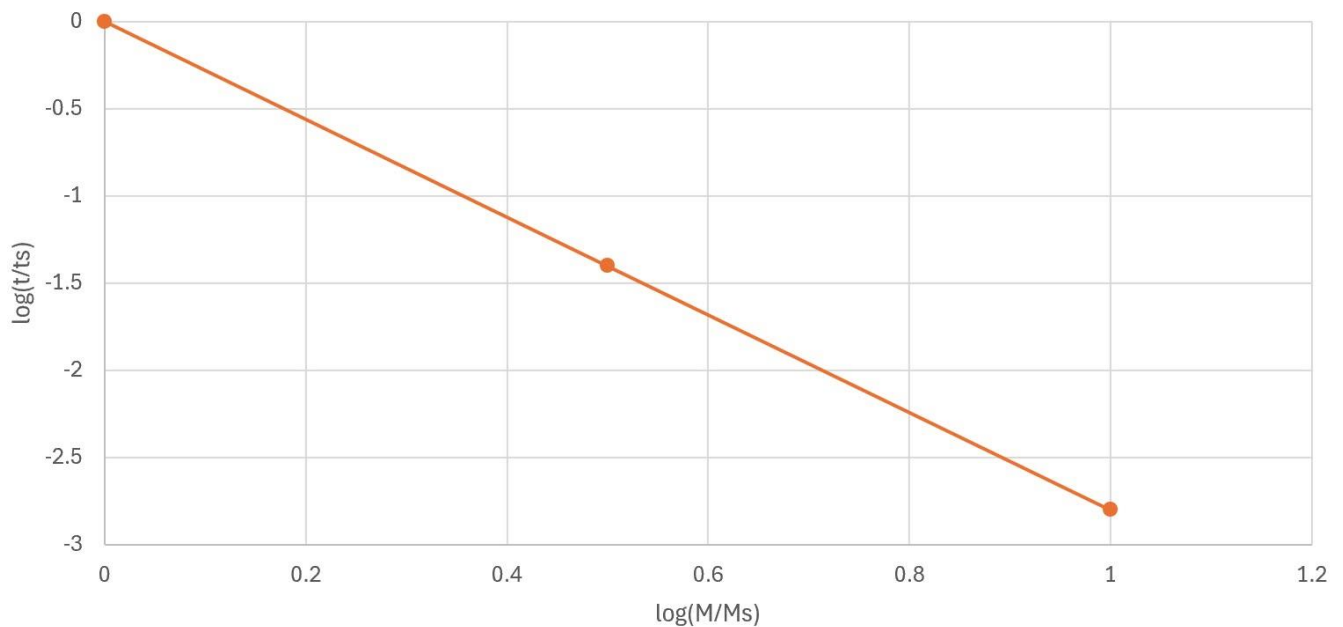
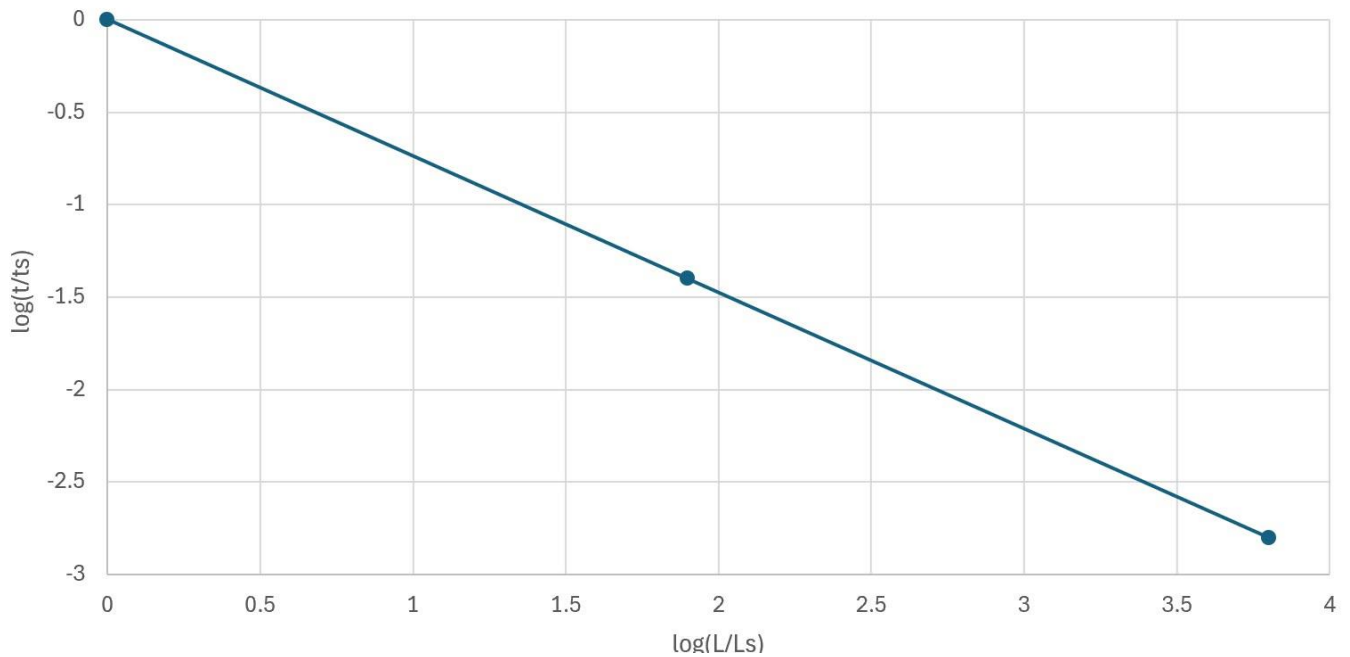
$$\log(t_3 / t_\odot) = -2.8 \text{ або } t_3 = t_\odot \times 10^{-2.8} = 15.8 \text{ мільйонів років.}$$

Таблиця для побудови графіка:

$\log(L_3 / L_\odot)$	$\log(M_3 / M_\odot)$	$\log(t_3 / t_\odot)$
0	0	0
1.9	0.5	-1.4
3.8	1	-2.8

Графіки будуть мати вигляд прямих, що задаються залежностями

$$\log(t_3 / t_\odot) \approx -2.8 * \log(M_3 / M_\odot) \text{ та } \log(t_3 / t_\odot) \approx - (2.8/3.8) * \log(L_3 / L_\odot) \text{ відповідно.}$$



II) Вік зоряного скупчення дорівнює тривалості життя на головній послідовності зорі, світність і маса якої відповідають точці дотику штрихової лінії скупчення до лінії головної послідовності. З діаграми праворуч видно, що дотик штрихової лінії до лінії головної послідовності для M67 відповідає логарифму світності  $\log(L_3/L_\odot) \approx 0.2$ , для Hyades  $\log(L_3/L_\odot) \approx 1.1$ , для M11  $\log(L_3/L_\odot) \approx 1.6$ , для Pleiades  $\log(L_3/L_\odot) \approx 2.8$ , для h і  $\chi$  Persei  $\log(L_3/L_\odot) \approx 4.0$ , для NGC 2362  $\log(L_3/L_\odot) \approx 4.8$ . З виразу  $t_3 = t_\odot \times (L_3/L_\odot)^{-2.8/3.8}$  обчислюємо, що вік зоряного скупчення M67 складає приблизно 7.09 млрд років, вік Hyades складає приблизно 1.54 млрд років, вік M11 складає приблизно 659 млн років, вік Pleiades складає приблизно 86 млн років, вік h і  $\chi$  Persei складає приблизно 11.2 млн років, вік NGC 2362 складає приблизно 2.9 млн років.

## 2. Астрокалендар.

У календарі одного астронома записані дати та час деяких послідовних астрономічних подій для мешканців України, а саме:

- A. 20 березня 11:00 UTC
- B. 21 червня 03:00 UTC
- C. 4 липня 10:00 UTC
- D. 22 вересня 21:00 UTC
- E. 21 грудня 15:00 UTC
- F. 3 січня 05:00 UTC

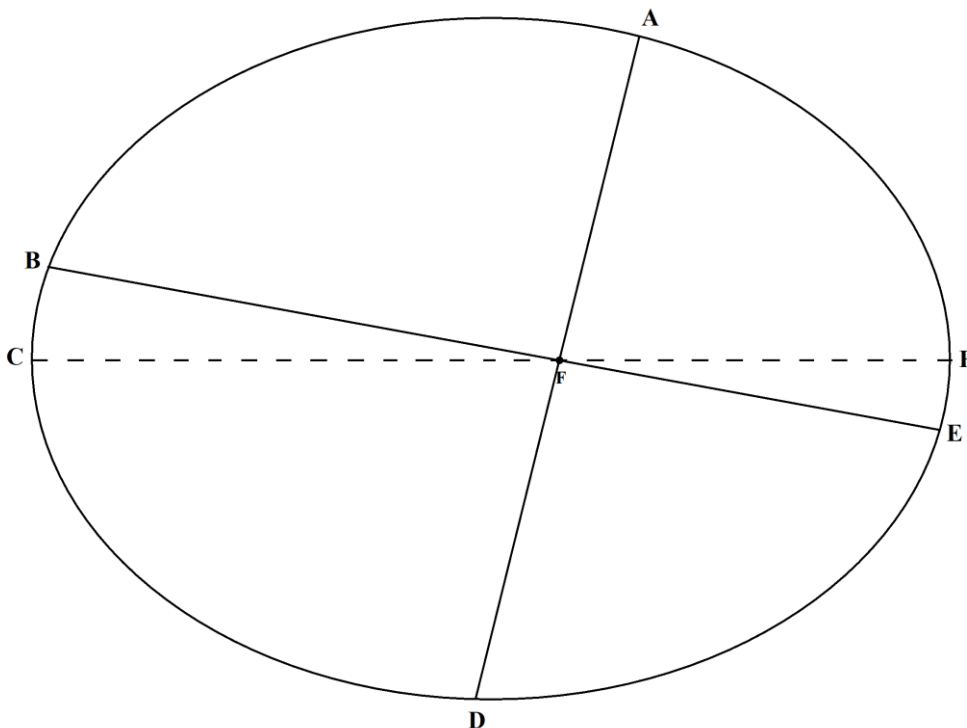
Запропонуйте, яким астрономічним подіям можуть відповідати ці дати (дайте підпис до кожної події A-F). Побудуйте схематичний рисунок орбіти Землі та позначте ці події на ньому. Використовуючи *лише* ці дані, оцініть ексцентриситет орбіти Землі. При обчисленнях можна вважати, що ексцентриситет орбіти Землі набагато менший за одиницю.

**(10 балів)**

### Розв'язок

Події, вказані в календарі:

- 20 березня 11:00 - весняне рівнодення (схилення Сонця дорівнює нулю).
- 21 червня 03:00 - літнє сонцестояння (схилення Сонця максимальне).
- 4 липня 10:00 - Земля в афелії.
- 22 вересня 21:00 - осіннє рівнодення (схилення Сонця дорівнює нулю).
- 21 грудня 15:00 - зимове сонцестояння (схилення Сонця максимальне).
- 3 січня 05:00 - Земля в перигелії.



Існує декілька способів оцінки ексцентриситету Землі. Наведемо два з них:

#### Спосіб 1:

Використаємо, що подія В досить близька до моменту, коли Земля в афелії (подія С); так само, подія Е є близька до моменту, коли Земля в перигелії (подія F). Тому вважаємо, що на проміжках ВС та EF кутові швидкості Землі практично не міняються, і дорівнюють кутовим швидкостям в афелії та перигелії відповідно ( $\omega_a$  та  $\omega_p$ ).

Позначимо час між подіями В та С як  $t_1 = t_C - t_B$ . Аналогічно вводимо  $t_2 = t_F - t_E$ . Тоді можемо записати:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\omega_{\text{п}}}{\omega_{\text{а}}},$$

оскільки кутова пройдена відстань однакова для двох проміжків.

Використаємо закон збереження кутового моменту для точок афелію та перигелію:

$$mr_a^2 \omega_a = mr_{\text{п}}^2 \omega_{\text{п}}.$$

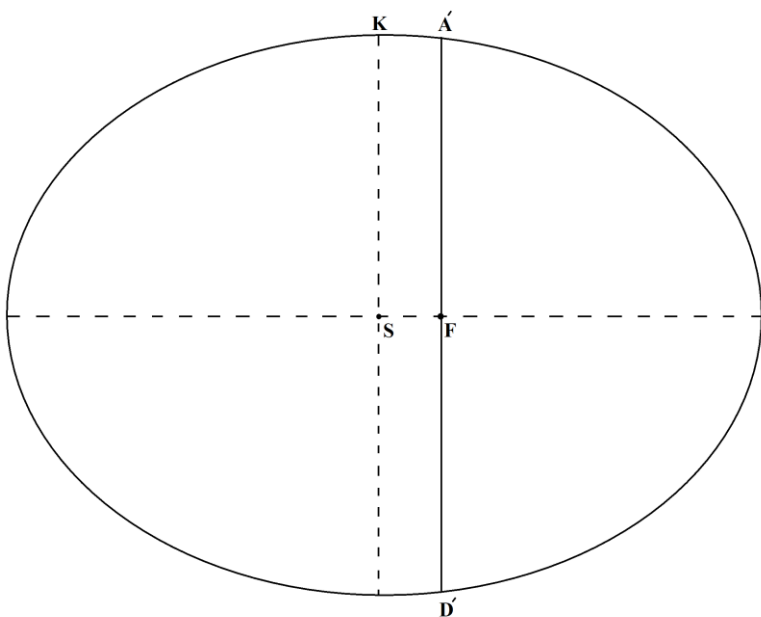
Тоді, враховуючи малість ексцентриситету, запишемо

$$\frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{r_a}{r_{\text{п}}}\right)^2 = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \approx 1 + 4e.$$

Обчисливши  $t_1 = 319$  годин,  $t_2 = 302$  години, знаходимо  $e \approx 0.014$ .

### Список 2:

Цей спосіб використовує другий закон Кеплера, згідно з яким планета при русі по орбіті за однаковий час проходить однакові по площі сектори. Для оцінки ми можемо знехтувати малою відстанню між В та С, а також між Е та F, і розглянути наступний рисунок:



Позначимо тепер за час  $t$  часовий проміжок між подіями А та D (точками рівнодень). Тоді можемо записати (згідно з другим законом Кеплера):

$$\frac{t}{365 \text{ днів} - t} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1}{\pi ab - S_1},$$

де  $S_1$  – площа сектора еліпса між точками А' та D' (при русі через апогелій). Враховуючи, що KSFA' це приблизно прямокутник, його площа приблизно дорівнює:

$$\Delta S = SF \cdot SK = a \cdot e \cdot b,$$

де  $a, b$  - велика та мала півосі еліпса. В першому порядку по малому ексцентриситету  $b = a\sqrt{1-e^2} \approx a$ .

$$\text{Тоді маємо } S_1 = \frac{\pi ab}{2} + 2\Delta S \approx \frac{\pi a^2}{2} + 2e \cdot a^2$$

$$\text{В результаті маємо } \frac{t}{365 \text{ днів} - t} = \frac{\frac{\pi a^2}{2} + 2e \cdot a^2}{\frac{\pi a^2}{2} - 2e \cdot a^2} \approx 1 + \frac{8e}{\pi}.$$

Порахувавши, що  $t = 13 + 24 \cdot 185 + 21 = 4474$  годин знаходимо  $e \approx 0.017$ .

### 3. Спиральна галактика.

Спостереження за спіральними галактиками свідчать, що їхні зовнішні ділянки обертаються значно швидше, ніж це передбачає класична ньютонівська механіка, а це свідчить про існування темної матерії. У цій задачі вам потрібно проаналізувати реальні дані спостережень галактики NGC 3198. Вважайте, що галактику спостерігаємо з ребра.

Нижче наведені спостереження галактики NGC 3198 у лінії 21 см (нейтральний водень,  $\lambda_0 = 21.1063$  см). Спостереження проводились із Землі, тому вам доступні лише кутові радіуси ( $\theta$ , у кутових мінутах) та довжина хвилі, на якій спостерігалася ця лінія ( $\lambda$ , у см).

$\theta(^{\circ})$	$\lambda(\text{см})$
0.5	21.1558
1.0	21.1572
1.5	21.1589
2.0	21.1611
2.5	21.1635
3.0	21.1659
3.5	21.1682
4.0	21.1703
4.5	21.1720
5.0	21.1734
5.5	21.1746
6.0	21.1755
6.5	21.1762
7.0	21.1762
7.5	21.1768
8.0	21.1776
8.5	21.1778
9.0	21.1779
9.5	21.1780
10.0	21.1780

а) Побудуйте криву обертання для цієї галактики (залежність швидкості обертання від кутової відстані до центра). Чи відповідає крива обертання галактики кеплерівській залежності (випадок, коли переважна частина маси зосереджена в центральному точковому тілі)?

б) Визначте відстань до галактики.

в) Побудуйте графік залежності динамічної маси галактики (такої точкової маси, розміщеної у центрі, щоб швидкість обертання відповідала заданій) від лінійної відстані до центра галактики.

г) Видима маса галактики (зорі та газ) становить  $6 \times 10^{10} M_{\odot}$ . Починаючи з якої відстані криву обертання не вдається пояснити гравітацією лише видимої матерії?

г) Яким має бути розподіл густини темної матерії залежно від відстані до центра, щоб спостерігалася така залежність динамічної маси на відстанях значно більших, аніж розрахованих у попередньому пункті?

**(10 балів)**

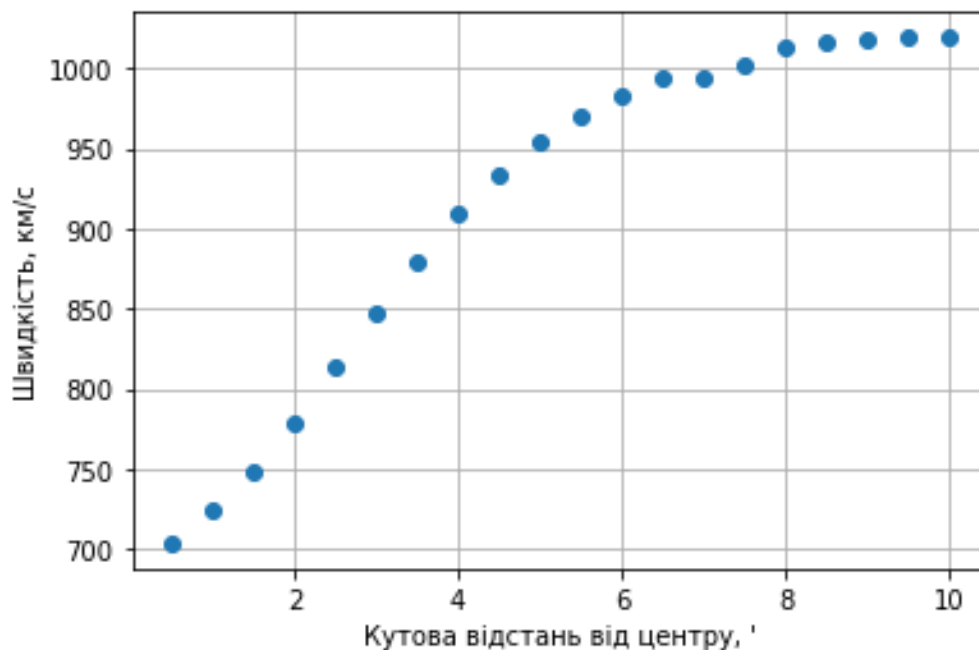
### Розв'язок

Спочатку знайдемо червоне зміщення для кожної точки, а потім швидкість.

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c \cdot \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

Побудуємо спочатку залежність  $v(\theta)$ .

$\theta'$	$\lambda$ , см	$v$ , км/с
0.5	21.1558	704
1.0	21.1572	723
1.5	21.1589	748
2.0	21.1611	779
2.5	21.1635	813
3.0	21.1659	847
3.5	21.1682	880
4.0	21.1703	910
4.5	21.172	934
5.0	21.1734	954
5.5	21.1746	971
6.0	21.1755	984
6.5	21.1762	994
7.0	21.1762	994
7.5	21.1768	1002
8.0	21.1776	1013
8.5	21.1778	1016
9.0	21.1779	1018
9.5	21.178	1019
10.0	21.178	1019

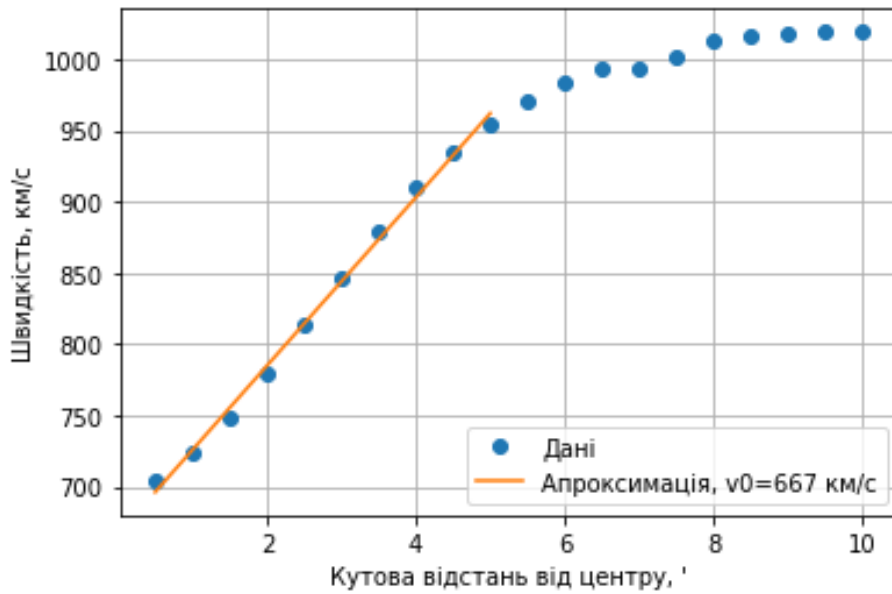


Бачимо, що для кутової відстані менше 5' залежність близька до лінійної.

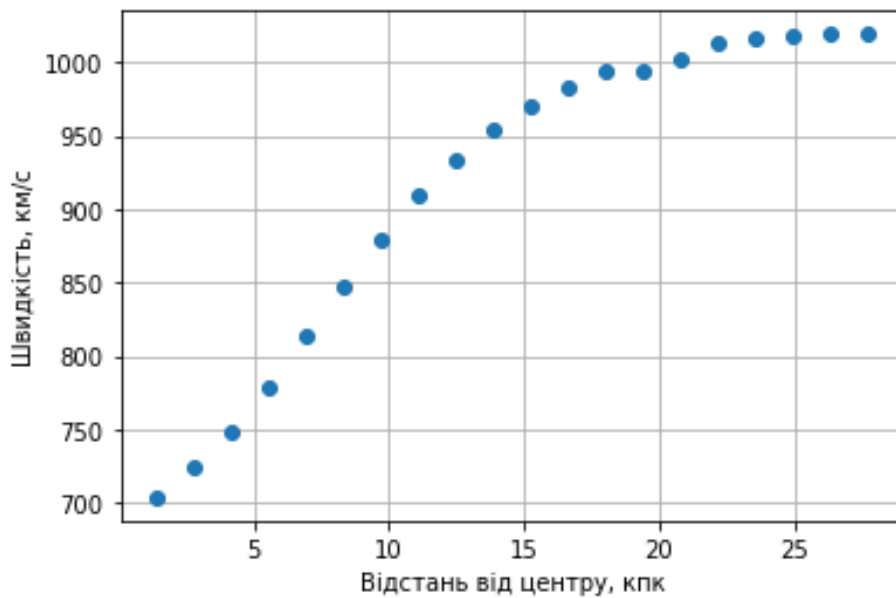
Знайдемо коефіцієнти цієї прямої з методу найменших квадратів, де  $k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ ,

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle.$$

$b = v_0 = 667 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ , звідки знаходимо відстань до галактики:  $r = \frac{v}{H} = 9.53 \text{ Мпк}$  (при цьому нехтуємо пекулярною швидкістю галактики відносно Молочного Шляху)



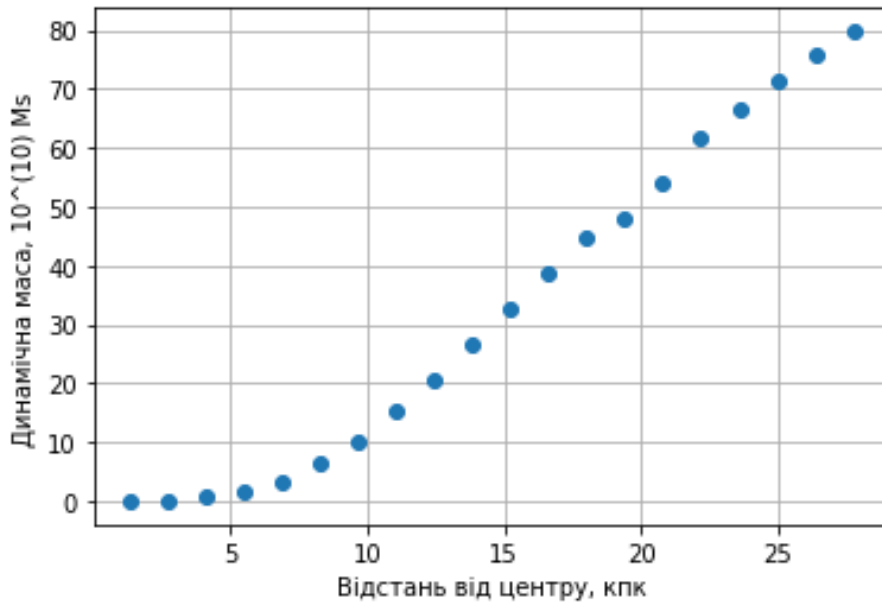
Для кривої обертання вісь x варто замінити на лінійну відстань до центру галактики.



Кеплерівське обертання:  $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ , чого у нас не спостерігається ні на малих відстанях до центру (що очікувано внаслідок зростання маси від центру), ні на великих відстанях.

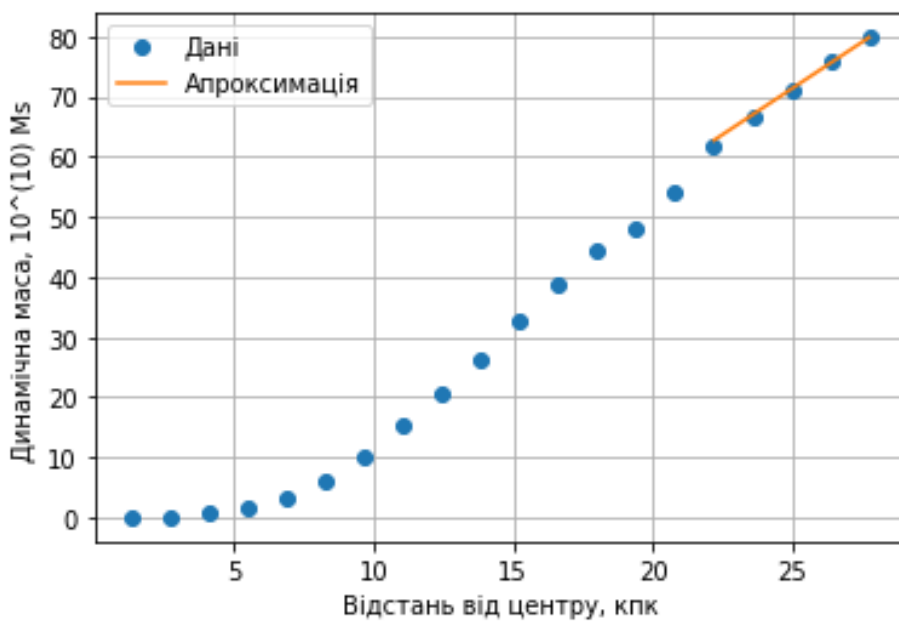
$$\frac{GM_{dyn}(r)}{r^2} = \frac{(v - v_0)^2}{r} \Rightarrow M_{dyn}(r) = \frac{(v - v_0)^2 r}{G}$$





Для точки  $r = 8.3$ кпк динамічна маса складає  $6.26 \cdot 10^{10} M_{Sun}$ , отже з відстані близько 8 кпк починає домінувати не баріонна компонента.

Видно, що на великих відстанях світною масою можна знехтувати. Проведемо лінійну апроксимацію для найбільш віддалених точок.



Для 3-6 точок отримуємо коефіцієнт:  $\frac{dM}{dr} = 3.1 \cdot 10^{10} \frac{M_s}{\text{кпк}} = 4\pi\rho(r)r^2 \Rightarrow \rho(r) = \frac{dM}{dr} \frac{1}{4\pi r^2}$

$$\rho(r) = \frac{1}{r^2} \cdot 2.5 \cdot 10^9 \frac{M_s}{\text{кпк}}$$