

1. Вік кулястого скупчення.

Астрономи досліджують зоряні скупчення, щоб визначити їхній вік. Для цього використовують діаграму Герцшпрунга-Рассела (HR-діаграму), яка показує розподіл зір за абсолютною зоряною величиною M_V та показником кольору $B - V$. У цій задачі вам потрібно визначити вік кулястого скупчення M3 за його HR-діаграмою.

Зорі головної послідовності різних класів мають характерні значення температури, показника кольору й абсолютної зоряної величини. Наближені значення цих параметрів подані у таблиці. Зорі еволюціонують з різною швидкістю: наймасивніші зорі швидше витрачають «паливо» і першими залишають головну послідовність. Наближені значення часу життя зір на головній послідовності також подані у таблиці.

Спектральний клас	Температура (К)	Показник кольору (B-V)	Абсолютна зоряна величина M_V	Маса (у сонячних масах)	Час життя (у роках)
O5	40 000	-0.4	-5.8	30	$3 \cdot 10^6$
B0	30 000	-0.3	-4.0	12	$9 \cdot 10^6$
B5	15 000	-0.2	-1.2	5	$5 \cdot 10^7$
A0	10 000	0	0.6	2.5	$3 \cdot 10^8$
A5	8 500	0.15	2.0	1.7	$9 \cdot 10^8$
F0	7 500	0.3	2.7	1.5	$2.2 \cdot 10^9$
F5	6 500	0.45	3.5	1.3	$4 \cdot 10^9$
G0	6 000	0.6	4.4	1.1	$8 \cdot 10^9$
G8	5 500	0.73	5.1	0.9	$1.3 \cdot 10^{10}$
K0	5 000	0.9	5.9	0.9	$2.2 \cdot 10^{10}$
K5	4 500	1.15	7.3	0.7	$4.5 \cdot 10^{10}$
M0	3 800	1.4	8.5	0.5	$6.8 \cdot 10^{10}$
M5	3 200	1.6	10	0.4	$2 \cdot 10^{12}$

Вам надано дані про 51 зорю в кулястому скупченні M3.

N	V	B
1	14.112	15.088
2	14.418	15.296
3	14.616	15.432
4	14.670	15.414
5	14.742	15.464
6	14.976	15.640
7	15.102	15.900
8	15.138	15.929
9	15.210	15.805
10	15.444	15.984
11	15.498	16.005
12	15.570	16.077
13	15.642	16.338
14	15.642	15.949
15	15.678	15.938
16	15.678	15.909

17	15.732	16.174
18	15.732	15.912
19	15.768	16.155
20	17.100	17.709
21	17.370	17.965
22	17.496	18.091
23	17.640	18.220
24	17.766	18.335
25	17.892	18.454
26	17.928	18.483
27	18.072	18.572
28	18.090	18.565
29	18.126	18.575
30	18.270	18.712
31	18.396	18.831
32	18.558	18.993
33	18.792	19.245
34	19.026	19.493
35	19.188	19.655
36	19.224	19.699
37	19.260	19.789
38	19.296	19.738
39	19.458	19.958
40	19.458	19.947
41	19.602	20.182
42	19.620	20.149
43	19.692	20.167
44	19.800	20.300
45	19.854	20.394
46	19.890	20.485
47	20.124	20.700
48	20.124	20.664
49	20.322	20.931
50	20.430	20.985
51	20.556	21.151

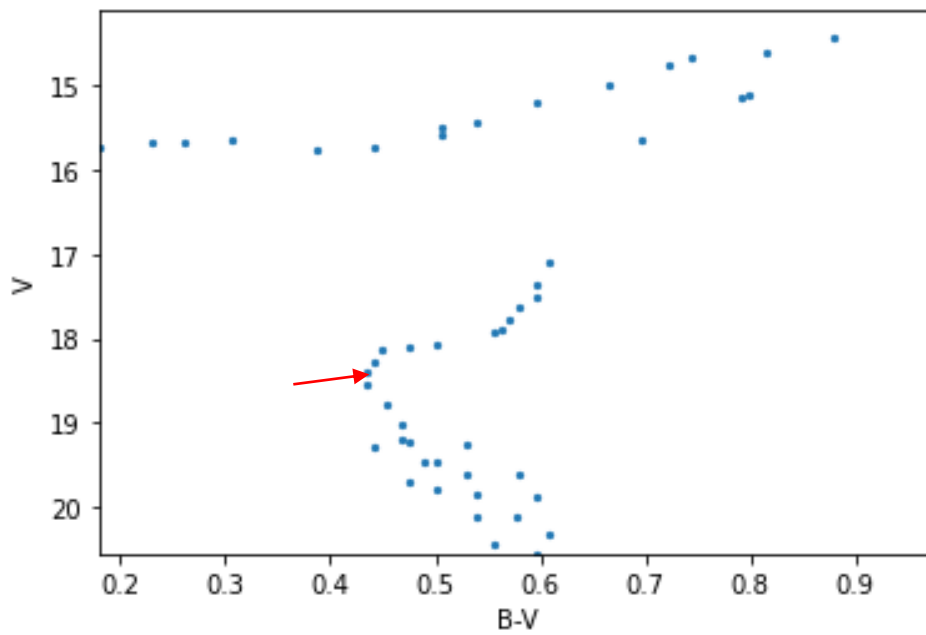
- а) Побудуйте HR-діаграму (V як функція $B-V$). Міжзоряним поглинанням знехтуйте.
б) Оцініть вік скупчення.
в) Оцініть відстань до скупчення.

(10 балів)

Розв'язок

N	V	B	B-V
1	14.112	15.088	0.976
2	14.418	15.296	0.878
3	14.616	15.432	0.816
4	14.670	15.414	0.744
5	14.742	15.464	0.722
6	14.976	15.640	0.664
7	15.102	15.900	0.798
8	15.138	15.929	0.791
9	15.210	15.805	0.595
10	15.444	15.984	0.540
11	15.498	16.005	0.507
12	15.570	16.077	0.507
13	15.642	16.338	0.696
14	15.642	15.949	0.307
15	15.678	15.938	0.260
16	15.678	15.909	0.231
17	15.732	16.174	0.442
18	15.732	15.912	0.180
19	15.768	16.155	0.387
20	17.100	17.709	0.609
21	17.370	17.965	0.595
22	17.496	18.091	0.595
23	17.640	18.220	0.580
24	17.766	18.335	0.569
25	17.892	18.454	0.562
26	17.928	18.483	0.555
27	18.072	18.572	0.500
28	18.090	18.565	0.475
29	18.126	18.575	0.449
30	18.270	18.712	0.442
31	18.396	18.831	0.435
32	18.558	18.993	0.435
33	18.792	19.245	0.453
34	19.026	19.493	0.467
35	19.188	19.655	0.467
36	19.224	19.699	0.475
37	19.260	19.789	0.529
38	19.296	19.738	0.442
39	19.458	19.958	0.500
40	19.458	19.947	0.489
41	19.602	20.182	0.580
42	19.620	20.149	0.529
43	19.692	20.167	0.475
44	19.800	20.300	0.500
45	19.854	20.394	0.540
46	19.890	20.485	0.595
47	20.124	20.700	0.576
48	20.124	20.664	0.540
49	20.322	20.931	0.609

50	20.430	20.985	0.555
51	20.556	21.151	0.595



Червоною стрілкою показана точка повороту, їй відповідає $B-V = 0.45$ (можливі варіанти $0,435; 0,442; 0,449; 0,453$).

З таблиці отримуємо, що це наближено відповідає класу F5.

Абсолютна зоряна величина 3.5.

Приблизний вік $4 \cdot 10^9$ років.

Видима зоряна величина 18.5^m .

Отримуємо наближену відстань

$$M = m + 5 - 5 \lg(r) \Rightarrow r = 10^{0.2(m+5-M)} = 10 \text{ кпк}$$

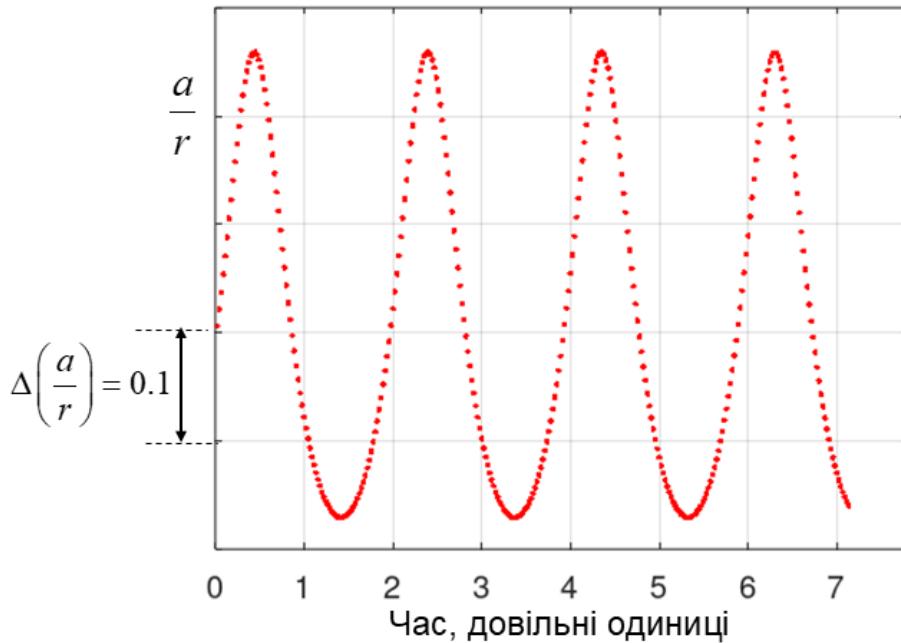
2. Два об'єкти Сонячної системи.

На поданих на наступній сторінці графіках уздовж осі абсцис відкладений час, уздовж осі ординат – відношення великої півосі орбіти до геліоцентричної відстані для двох об'єктів Сонячної системи.

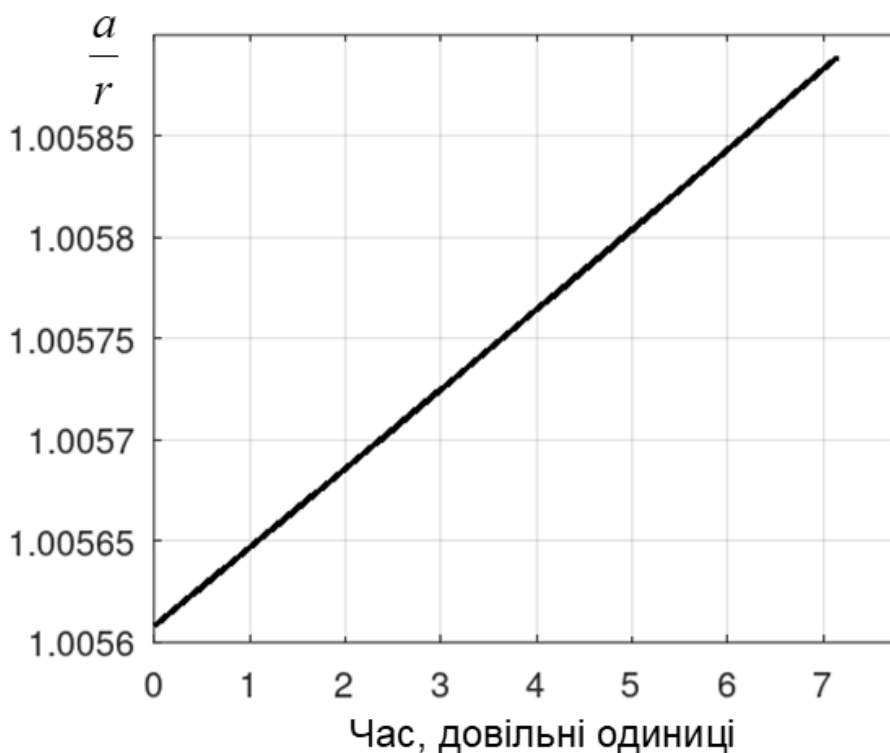
а) Визначте ексцентриситет орбіти першого об'єкта. Порівняйте отримане число з ексцентриситетами орбіт планет і зробіть висновок, якої з них має стосуватися результат. Якщо можливих варіантів більше одного, то розглядайте їх усіх.

б) Чому дорівнює одиниця часу (ціна поділки) на осі абсцис, якщо керуватися результатом із пункту а)?

в) Часовий інтервал на другому графіку такий самий, що й на першому. Враховуючи цей факт та виконавши необхідні розрахунки, визначте другу планету.



Перший об'єкт: a – велика піввісь, r – геліоцентрична відстань



Другий об'єкт: a – велика піввісь, r – геліоцентрична відстань

Визначаючи планети, візьміть до уваги такі дані:

Планета	Велика піввісь, а.о.	Ексцентриситет
Меркурій	0.387	0.2056
Венера	0.723	0.0068
Земля	1.00	0.0167
Марс	1.52	0.0934
Юпітер	5.20	0.0489
Сатурн	9.58	0.0565
Уран	19.19	0.0472
Нептун	30.07	0.0087

(10 балів)

Розв'язок

а) Планета рухається навколо Сонця уздовж кривої другого порядку, полярне рівняння якої має вигляд:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi},$$

де r – геліоцентрична відстань; p – фокальний параметр орбіти; e – ексцентриситет; φ – істинна аномалія; a – велика піввісь.

Відповідно,

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e^2}.$$

Позаяк модуль косинуса обмежений одиницею, то ми можемо вказати діапазон зміни a/r :

$$\frac{a}{r} \in \left[\frac{1}{1 + e}; \frac{1}{1 - e} \right].$$

Також у цьому пункті можна скористатися формулами для відстаней у перигелії й афелії:

$$q = a(1 - e); Q = a(1 + e). \quad (1 \text{ бал})$$

Отже, маємо спосіб визначення ексцентриситету з графіка за максимальним перепадом a/r :

$$\Delta_{\max} = \frac{1}{1 - e} - \frac{1}{1 + e} = \frac{2e}{1 - e^2}.$$

Звідси

$$e^2 + \frac{2}{\Delta_{\max}} e - 1 = 0 \quad (1 \text{ бал})$$

Знаходимо:

$$e = -\frac{1}{\Delta_{\max}} + \sqrt{\frac{1}{\Delta_{\max}^2} + 1}.$$

Проведемо вимірювання на графіку. При роботі з роздруківкою інтервал від максимуму до мінімуму становив 83 мм, а між мінімальним і максимальним наявним значенням на осі ординат маємо 95 мм, що, згідно з позначками біля осі, становить 0.5. Звідси

$$\Delta_{\max} = \frac{83}{95} \cdot 0.5 = 0.437 \quad (1 \text{ бал})$$

Підставляючи це значення у формулу для ексцентриситету, знаходимо: $e = 0.209$.

Із восьми планет отриманий результат може відповідати тільки Меркурію. (1 бал)

б) Реальний період обертання Меркурія можемо визначити за III законом Кеплера, а саме:

$$T(p) = a^{3/2} = 0.387^{3/2} = 0.241.$$

Це значення в добах дає 87.9. При вимірюванні три періоди відповідали 92.5 мм, а 7 часових одиниць 110 мм. Тому для згаданої одиниці:

$$1 \text{ од.} = 87.9^d \cdot \frac{110/7}{92.5/3} = 44.8^d \approx 45^d \quad . (3 \text{ бали})$$

в) У другому випадку залежність a/r на інтервалі в понад 300 діб є лінійною, тому період обертання планети навколо Сонця суттєво перевищує 1 рік. Отже, після Меркурія можемо також відкинути, щонайменш, Венеру, Землю й Марс. Маємо побудованою функцію

$$\frac{a}{r} = f(\varphi) = \frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e^2}$$

(тільки в залежності від часу). Істинна аномалія за час, значно менший періоду, змінилася несуттєво. Беремо середнє значення й відразу маємо рівняння:

$$\frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e^2} = 1.00575 \quad . (1 \text{ бал})$$

Для зміни функції з часом можемо записати:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \frac{e \cos(\varphi + \Delta \varphi) - e \cos \varphi}{1 - e^2} = -\frac{2e}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2} \cdot \sin \left(\varphi + \frac{\Delta \varphi}{2} \right)}{1 - e^2}$$

Для малих проміжків часу $\Delta \varphi \rightarrow 0$, враховуємо $\sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx \frac{\Delta \varphi}{2}$.

Відповідно, $\frac{\Delta f}{\Delta t} = -\frac{e}{1 - e^2} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \cdot \sin \varphi \approx -\frac{e}{1 - e^2} \omega \sin \varphi$,

Зміну істинної аномалії можемо наближено прирівняти до кутової швидкості з огляду на невеликі ексцентриситети орбіт усіх планет-гігантів, вибір між якими і маємо зробити. (При володінні диференціальним численням наведений результат можна відразу отримати обчисленням похідної).

Відношення приросту функції до інтервалу часу знаходимо із графіка, враховуючи, що одиницю часу вже ідентифіковано. По осі ординат другого графіка $3 \cdot 10^{-4}$ відповідає 99 мм. Перепад значень за ~ 315 діб становить 89 мм. Звідси знаходимо:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = 3 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{89/99}{315/365} \text{ р.}^{-1} = 3.13 \cdot 10^{-4} \text{ р.}^{-1}$$

Ексцентриситети орбіт планет-гігантів малі, тому їх квадратами можна знехтувати порівняно з одиницею. Утворюється система рівнянь:

$$\begin{cases} e \cos \varphi = 5.75 \cdot 10^{-3} \\ -e \sin \varphi = \frac{3.13 \cdot 10^{-4} \text{ р.}^{-1}}{\omega} \end{cases} \quad . (1 \text{ бал})$$

Істинну аномалію можемо усунути, тоді:

$$e = \sqrt{5.75^2 \cdot 10^{-6} + 3.13^2 \cdot 10^{-8} \cdot \left(\frac{T(\text{р.})}{2\pi} \right)^2}$$

За третім законом Кеплера обчислюємо періоди обертання Юпітера, Сатурна, Урана й Нептуна. Отримуємо (у роках):

$$T = 11.86; 29.65; 84.06; 164.9$$

На основі цих значень знаходимо можливі ексцентриситети (починаючи з Юпітера):

$$e = 5.78 \cdot 10^{-3}; 5.94 \cdot 10^{-3}; 7.11 \cdot 10^{-3}; 1.00 \cdot 10^{-2}$$

Близьким є тільки ексцентриситет Нептуна, тому цієї планети й має стосуватися графік. Відхилення від табличного результату, яке дещо перевищує 10%, може пояснюватися не лише похибками вимірювань, але й збуреннями в русі Нептуна, адже орбіта планети дуже близька до колової. (1 бал)

Відповідь

а) $e = 0.21$, Меркурій. б) 45 діб. в) Нептун.

3. Затемнення на Марсі.

5 березня 2024 року NASA опублікувала відео транзиту Фобоса – супутника Марса – по диску Сонця, який спостерігав марсохід *Perseverance*, розташований поблизу екватора планети, 8 лютого 2024 року.

Вам запропоновано декілька стопкадрів із цього відео, на яких вказаний відносний час їхнього фіксування. Використовуючи ці світлини, вам необхідно виконати такі завдання:

- Оцінити лінійні розміри Фобоса, вважаючи, що обриси тіні Фобоса мають форму, близьку до еліпса.
- Оцінити значення кутової висоти Фобоса над горизонтом у момент спостережень.
- Оцінити основні характеристики руху Фобоса: кутову та лінійну швидкості, синодичний і сидеричний періоди обертання.

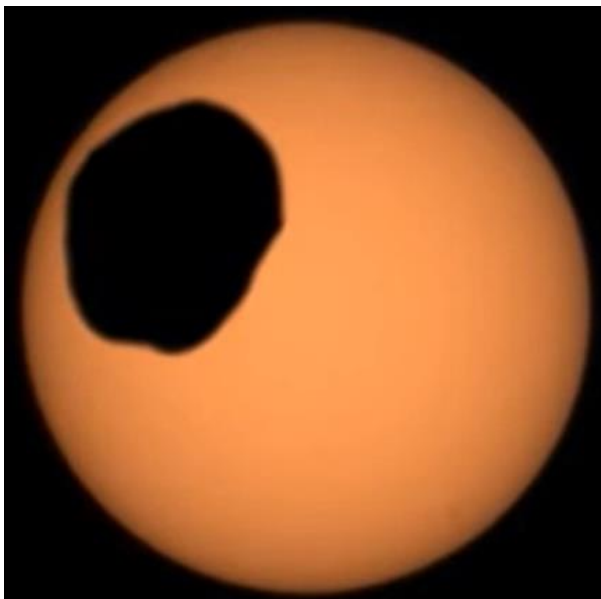
Орбіти Фобоса та Марса вважайте коловими. Фобос обертається в екваторіальній площині Марса.

У момент транзиту відстань від точки спостереження до центра Фобоса – 8064 км, відстань Марса від Сонця – 1.435 а.о., діаметр Сонця – 1391400 км, радіус Марса – 3396 км, радіус орбіти Фобоса – 9380 км, сидеричний період обертання Марса навколо власної осі – 24.62 години.

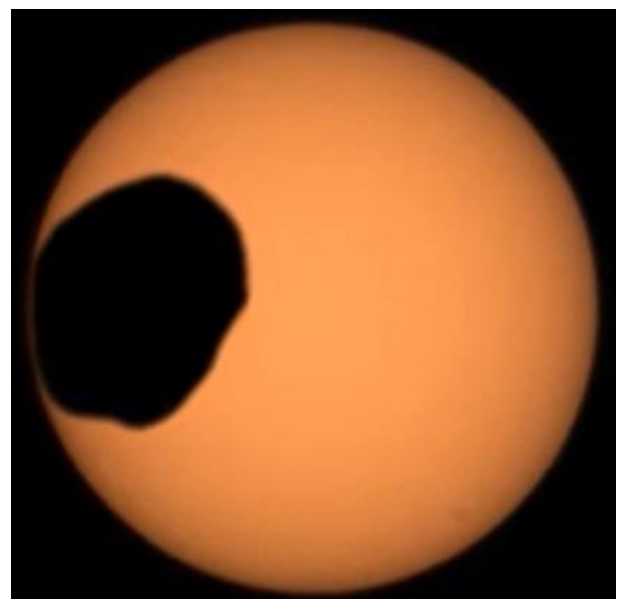
0^s



17^s



21^s



(10 балів)

Розв'язок

1. Оцінка лінійних розмірів Фобоса.
Для їхньої оцінки міркуватимемо так:

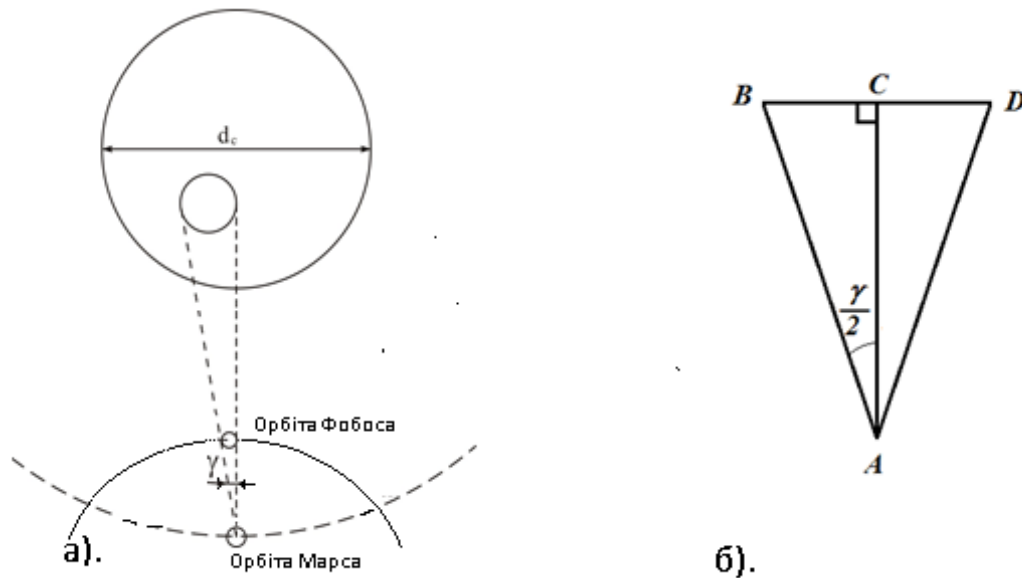


Рис. 1. Схематичне зображення транзити Фобоса по диску Сонця

Для спостерігача, який перебуває на Марсі, кут γ , під яким він бачить Фобос та його «тінь» (на Сонці) є однаковим (рис. 1а). Із прямокутного трикутника ABC (в якому BC – розмір протяжності Фобоса в певному напрямку, AC – відстань від Марса до Фобоса, а спостерігач перебуває в т. А, (рис. 1б) визначимо:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{BC}{AC} = \frac{D}{2r},$$

де D – реальний розмір Фобоса в певному напрямку, r – відстань від точки спостереження до Фобоса.

Позаяк при малих кутах синус і тангенс кута, вираженого в радіанах, дорівнюють самому куту, то можна наближено записати:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{D}{2r}, \quad \text{або} \quad \gamma = \frac{D}{r}$$

і – відповідно – реальний розмір Фобоса в певному напрямку

$$D = \gamma \cdot r \quad (1)$$

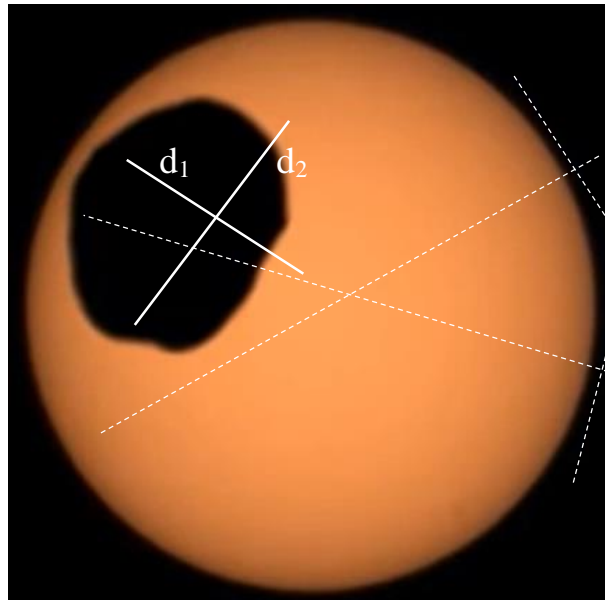
Робота із зображенням. На світлині вимірюємо діаметр зображення диску Сонця d_c і розміри осей Фобоса d_1 і d_2 (рис. 2). За відомими значеннями відстані Марса від Сонця і фізичним діаметром Сонця з тих самих міркувань визначаємо кутовий діаметр візуально спостережуваного диску Сонця:

$$\gamma_c = \frac{D_c}{a_M}.$$

Далі можна визначити кутовий масштаб зображення: $\mu = \frac{\gamma_c}{d_c}$ (2)

За кутовим масштабом (2) можна визначити кутовий розмір осей «тіні» Фобоса (наближено вважаючи її обриси еліпсом) на диску Сонця: $\gamma = \mu \cdot d$ (3)

Підставивши (3) в (1), отримаємо: $D = \gamma \cdot r = \mu \cdot d \cdot r$ (4)



Обчислимо шукані значення лінійних розмірів Фобоса:

а) Експериментальні дані:

$$d_c = 78 \text{ мм}, d_1 = 29 \text{ мм}, d_2 = 36 \text{ мм}$$

б) Розрахункові дані:

$$\gamma_c = \frac{1\,391\,400 \text{ км}}{1,435 \cdot 149\,600\,000 \text{ км}} = 0,00648 \text{ рад},$$

$$\mu = \frac{0,00648}{78} = 0,000083 \text{ рад/с}.$$

$$D_1 = 0,000083 \cdot 29 \cdot 8064 = 19,41 \text{ (км)} - \text{«мала вісь» Фобоса.}$$

$$D_2 = 0,000083 \cdot 36 \cdot 8064 = 24,1 \text{ (км)} - \text{«велика вісь» Фобоса.}$$

Насправді лінійні розміри Фобоса (має форму картоплини) – 26,8 км × 22,4 км × 18,4 км. Тому допустимим діапазоном «правильних» значень для осей є діапазон 18,4 км – 26,8 км.

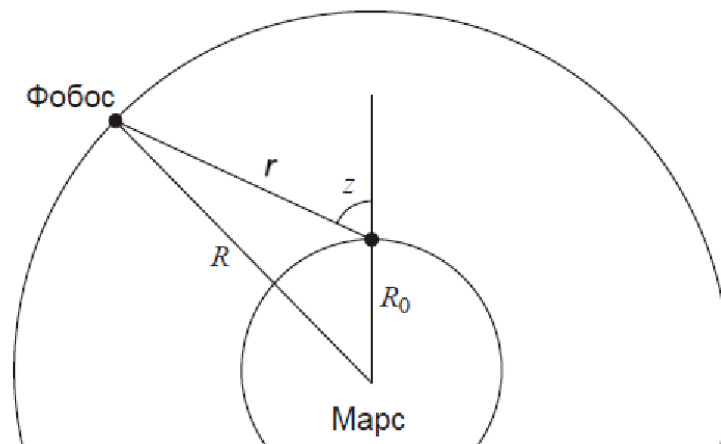
2. Знаходження кутової висоти Сонця над горизонтом в момент спостережень.

Визначимо зенітну відстань Фобоса z у момент спостереження, знаючи радіуси Марса ($R_0 = 3396$ км) та орбіти Фобоса ($R = 9380$ км), а також відстань r до Фобоса в момент спостережень. З теореми косинусів маємо:

$$R^2 = R_0^2 + r^2 - 2R_0r \cos(180 - z) = R_0^2 + r^2 + 2R_0r \cos(z)$$

$$z = \arccos\left(\frac{R^2 - R_0^2 - r^2}{2R_0r}\right) = \arccos\left(\frac{9380^2 - 3396^2 - 8064^2}{2 \cdot 3396 \cdot 8064}\right) = 77,9^\circ$$

Висота Фобоса над горизонтом у момент спостережень дорівнює $12,1^\circ$.

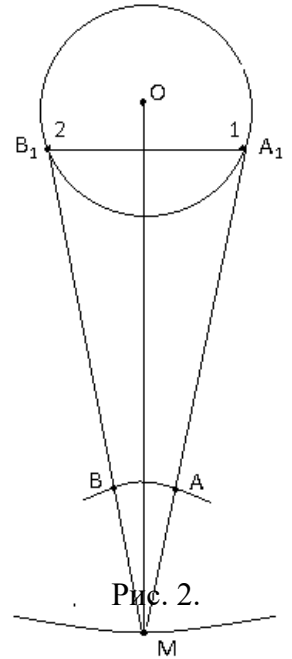


Дані зі <https://stellarium.org/uk/>: кутова висота Сонця – $14^\circ 9'$.

3. Використання результатів спостережень для визначення характеристик руху Фобоса навколо Марса.

Обчислимо кутову та лінійну швидкість руху Фобоса, синодичний і сидеричний період його обертання.

На рис. 2 маємо картину видимого руху зображення Фобоса по диску Сонця. Зафіксовані моменти, коли вибрана «точка» Фобоса перебуває на початку диску (1) і коли «залишає» Сонце (2).



Дугу $\overset{\frown}{AB}$ з точки спостереження на поверхні Марса видно під кутом α , значення якого у радіанній мірі дорівнює: $\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r}$ (5)

Для знаходження кута α скористаємося визначеним кутовим масштабом (2) і довжиною траєкторії вибраної «точки» Фобоса L (відстань між положеннями 1 і 2).

$$\alpha = \mu \cdot L \quad (6)$$

Значення кутової швидкості руху Фобоса по орбіті у системі відліку, пов'язаній з Марсом, запишеться так:

$$\omega = \frac{\alpha}{\Delta t}, \quad (7)$$

де Δt – час руху центра Фобоса по диску Сонця.

(У цей час Марс рухається відносно Сонця з кутовою швидкістю $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$, де

T_M – сидеричний період обертання Марса. Розрахунки показують, що значення кутової швидкості руху Марса значно менше від кутової швидкості руху Фобоса і ним можна знехтувати).

Лінійна (орбітальна) швидкість руху Фобоса обчислюється за співвідношенням:

$$v_\phi = \omega_\phi \cdot R \quad (8)$$

Вважаючи орбіту Фобоса коловою, можна оцінити його сидеричний період обертання із співвідношення:

$$T_\phi = \frac{2\pi}{\omega_\phi} \quad (9)$$

Використовуючи співвідношення:

$$\frac{1}{T_\phi} - \frac{1}{T_M} = \frac{1}{S} \rightarrow S = \frac{T_M \cdot T_\phi}{T_M - T_\phi}$$

можна визначити синодичний період обертання Фобоса.

Оскільки $T_M \gg T_\phi$, то можна прийти до висновку, що S наближено дорівнює T_ϕ .

Обчислимо шукані значення лінійної та кутової швидкості, синодичного і сидеричного періоду обертання Фобоса:

а) Експериментальні та вихідні дані:

$$\gamma_c = 0,00648 \text{ (рад)}, d_c = 78 \text{ мм}, L = 56 \text{ мм}, \Delta t = 21 \text{ с}$$

б) Розрахункові дані:

$$\mu = \frac{\gamma_c}{d_c} = \frac{0,00648}{78} = 0,000083 \frac{\text{рад}}{\text{мм}},$$

$$\alpha = \mu \cdot L = 0,004648 \text{ рад};$$

$$\omega_\phi = \frac{\alpha}{\Delta t} = 0,000221 \text{ рад/с}$$

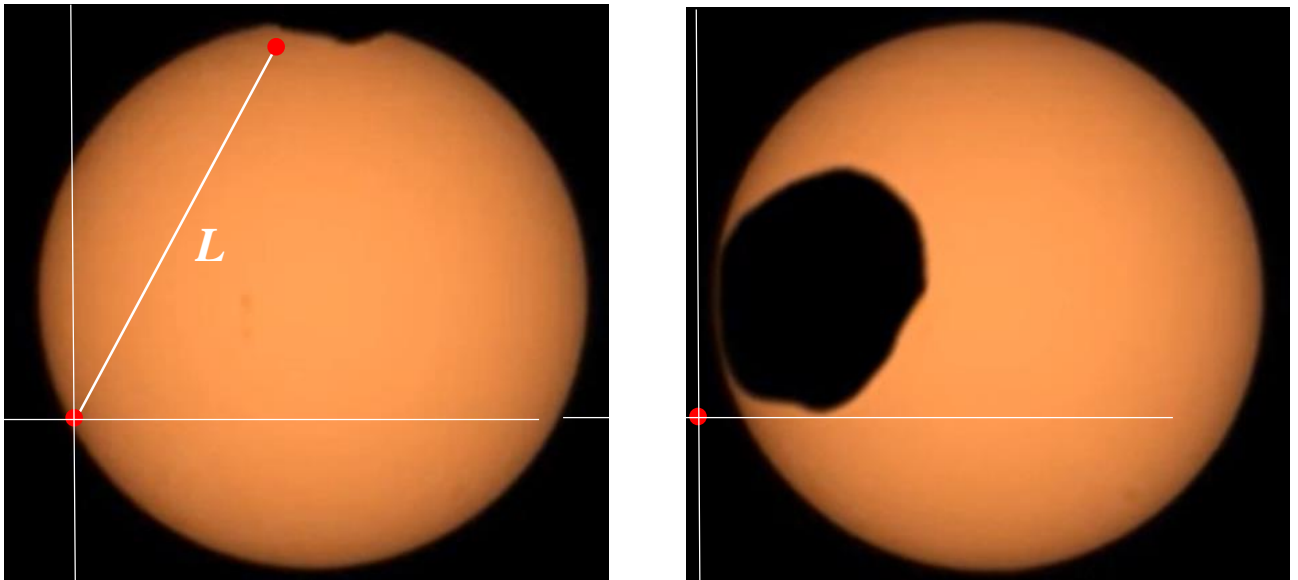
$$v_\phi = \omega_\phi \cdot R = 2,08 \text{ км/с}$$

$$T_\phi = \frac{2\pi}{\omega_\phi} = 7,9 \text{ год}$$

$$S = \frac{T_M \cdot T_\phi}{T_M + T_\phi} = 7,9 \text{ год}$$

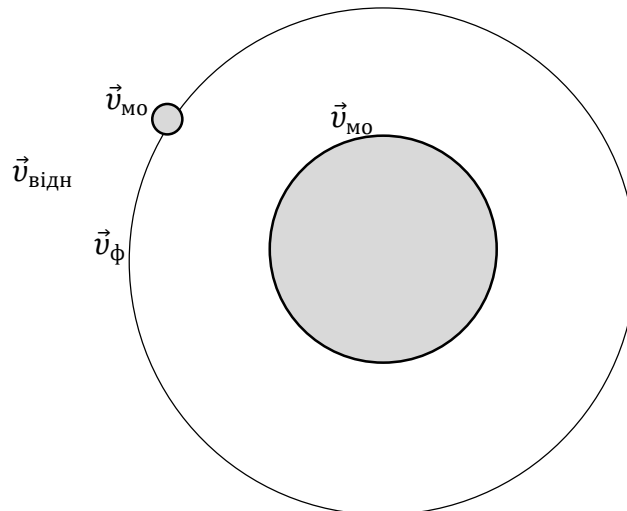
0^s

21^s



Насправді зі спостережень ми отримуємо значення «видимої» кутової швидкості обертання Фобоса навколо Марса, складовими якої є кутова швидкість Фобоса та кутова швидкість осьового обертання Марса (рис. 3).

Чи потрібно враховувати обертання Марса навколо власної осі? Чи за певних умов цим обертанням можна знехтувати?



Період обертання Марса навколо осі – $T_{Mo} = 24,62$ години, лінійна швидкість:

$$v_{Mo} = \frac{2\pi R_0}{T_{Mo}} = 240,7 \text{ м/с.}$$

Лінійна швидкість обертання Фобоса навколо Марса згідно з отриманими розрахунками складає $2,08 \text{ км/с}$.

Позаяк Фобос перебуває поблизу горизонту, то, як видно з рис. 3, проекція лінійної швидкості обертання Марса навколо власної осі: $v'_{Mo} = 240,7 \sin 12^\circ = 50 \text{ м/с}$. Отримане значення значно менше від швидкості руху Фобоса, тому цією складовою можна знехтувати.

Дані зі <https://stellarium.org/uk/>: сидеричний та синодичний періоди – $0,32$ доби = $7,68$ год; орбітальна швидкість – $2,112 \text{ км/с}$.